Přerovnávání řad

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Ostrava, 9.6. 2023

(MODAM 2023)

Věta

Konverguje-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

pak konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Věta

Konverguje-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

pak konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definice

Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *pak o (konvergentní) řadě* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *řekneme, že je* *absolutně konvergentní.*

Věta

Konverguje-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

pak konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definice

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *pak o (konvergentní) řadě* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řekneme, že je* *absolutně konvergentní.*

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, *pak řekneme, že je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *neabsolutně konvergentní.*

Příklady

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots$

  je absolutně konvergentní, neboť

  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$ konverguje.

Příklady

- Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots$

  je absolutně konvergentní, neboť

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$ konverguje.

- Lze ukázat, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

  konverguje, zatímco řada

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ diverguje (harmonická řada).

  Proto je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ neabsolutně konvergentní.

Definice (přerovnání řady)

Buď $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekce. Pak o řadě*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + a_{\varphi(4)} + a_{\varphi(5)} + a_{\varphi(6)} + \dots$$

říkáme, že vznikla přerovnáním řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots .$$

Definice (přerovnání řady)

Buď $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekce. Pak o řadě*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + a_{\varphi(4)} + a_{\varphi(5)} + a_{\varphi(6)} + \dots$$

říkáme, že vznikla přerovnáním řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots .$$

Věta

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně* $\implies$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pro každé přerovnání.*

Definice (přerovnání řady)

Buď $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekce. Pak o řadě*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + a_{\varphi(4)} + a_{\varphi(5)} + a_{\varphi(6)} + \dots$$

říkáme, že vznikla přerovnáním řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots .$$

Věta

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pro každé přerovnání.*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pro vhodné přerovnání.*

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$.

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n}=1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=$$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \xrightarrow{\text{obrázek}} \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n}=1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\xrightarrow{\text{obrázek}}\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

Dále je jasné, že $s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2+0=\ln 2$, a proto $\boxed{s_n\to\ln 2.}$

Příklad

Určete součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Řešení.

Pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů naší řady platí

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \xrightarrow{\text{obrázek}} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2.$$

Dále je jasné, že $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2 + 0 = \ln 2$, a proto $\boxed{s_n \to \ln 2.}$

To ale znamená, že

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

$\square$

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\dots=\ln 2,$$

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\dots=\ln 2,$$

$$+\tfrac{1}{2}\qquad-\tfrac{1}{4}\qquad+\tfrac{1}{6}\qquad-\tfrac{1}{8}\qquad+\tfrac{1}{10}\qquad-\tfrac{1}{12}\qquad+\tfrac{1}{14}\qquad\dots$$

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\dots=\ln 2,$$

$$+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{14}\dots=\tfrac{1}{2}\ln 2,$$

Příklad

Určete součet řady

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{14} + \dots = \ln 2,$$

$$0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{10} + 0 - \tfrac{1}{12} + 0 + \tfrac{1}{14} + \dots = \tfrac{1}{2} \ln 2,$$

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\dots=\ln 2,$$

$$0+\tfrac{1}{2}+0-\tfrac{1}{4}+0+\tfrac{1}{6}+0-\tfrac{1}{8}+0+\tfrac{1}{10}+0-\tfrac{1}{12}+0+\tfrac{1}{14}+\dots=\tfrac{1}{2}\ln 2,$$

$$1+0+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+0+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+0+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{13}+0+\dots=\tfrac{3}{2}\ln 2.$$

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$\begin{array}{l} 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\dots=\ln 2,\\ 0+\tfrac{1}{2}+0-\tfrac{1}{4}+0+\tfrac{1}{6}+0-\tfrac{1}{8}+0+\tfrac{1}{10}+0-\tfrac{1}{12}+0+\tfrac{1}{14}+\dots=\tfrac{1}{2}\ln 2,\\ \hline 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{13}+\dots=\tfrac{3}{2}\ln 2. \end{array}$$

Příklad

Určete součet řady

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots,$$

která vznikla přerovnáním Leibnizovy řady.

Řešení.

Víme, že

$$\begin{array}{l}
1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\dots=\ln 2,\\
{\color{red}0}+\tfrac{1}{2}+{\color{red}0}-\tfrac{1}{4}+{\color{red}0}+\tfrac{1}{6}+{\color{red}0}-\tfrac{1}{8}+{\color{red}0}+\tfrac{1}{10}+{\color{red}0}-\tfrac{1}{12}+{\color{red}0}+\tfrac{1}{14}+\dots=\tfrac{1}{2}\ln 2,\\
\hline
1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{13}+\dots=\tfrac{3}{2}\ln 2.
\end{array}$$

Odtud

$$\underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots}_{\frac{3}{2}\ln 2}\neq\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\dots}_{\ln 2}$$

$\square$

Animace 1

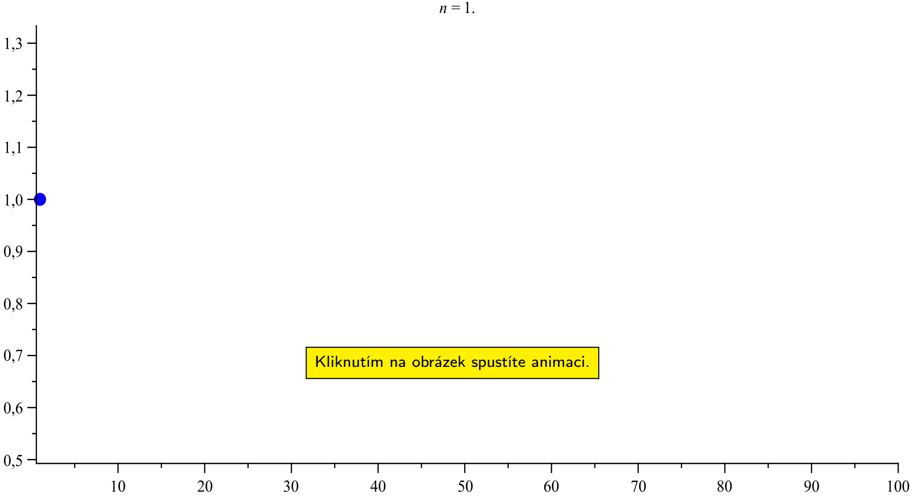
$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots$ $\quad$ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\dots$

Animace 1

$$\color{blue}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots} \neq \color{red}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots}$$

Animace 1

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots \neq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\dots$$

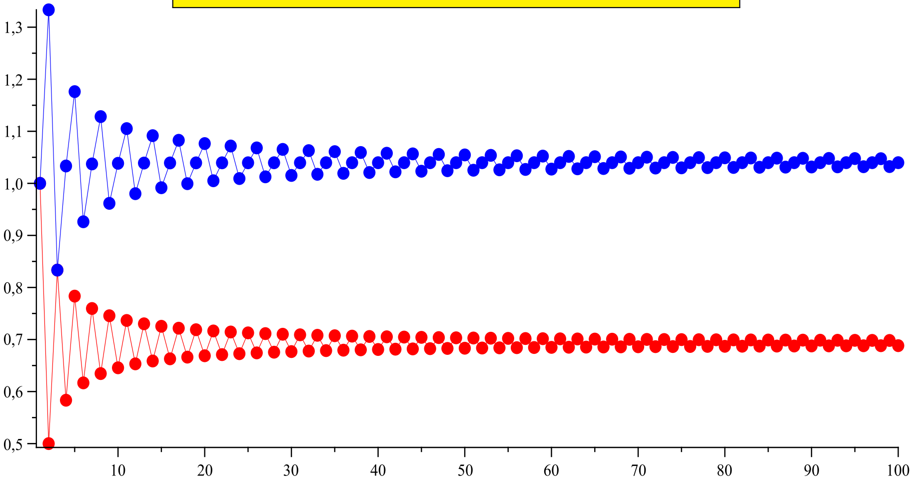


V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

Animace 1

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots \neq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):



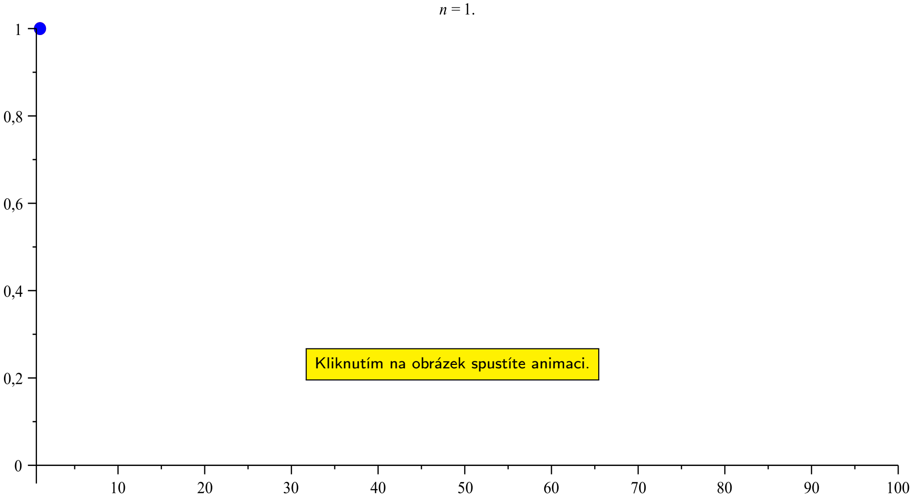
Animace 2 (další přerovnání Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$)

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \dots$$

Animace 2 (další přerovnání Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$)

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \dots = 0$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\frac{1}{24}+\frac{1}{7}-\dots = 0$$

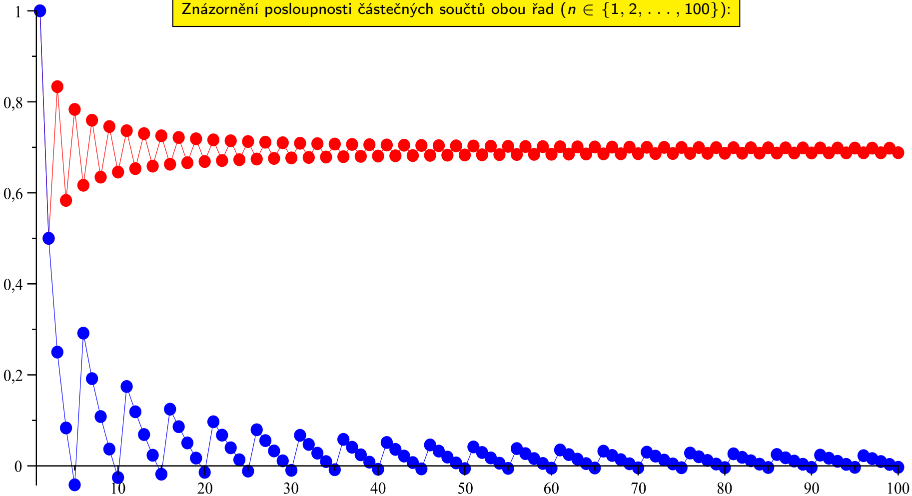


Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \dots = 0$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Příklad

Uvažujme řadu

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\dots.$$

Určete součet jejího přerovnání

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{15}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\dots.$$

Příklad

Uvažujme řadu

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\dots .$$

Určete součet jejího přerovnání

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{15}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\dots .$$

Řešení.

Označme $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů přerovnané řady. Pak platí

$$r_{3n}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)}_{2n \text{ členů}}-\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}_{n \text{ členů}}\geq$$

$$\geq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{4n}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=$$

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

Právě jsme zjistili, že $r_{3n} \to +\infty$.

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

Právě jsme zjistili, že $r_{3n} \to +\infty$.

Podobně jako v předchozím příkladu bychom ukázali, že $r_n \to +\infty$,

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

Právě jsme zjistili, že $r_{3n} \to +\infty$.

Podobně jako v předchozím příkladu bychom ukázali, že $r_n \to +\infty$, tzn.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots = +\infty.$$

□

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

Právě jsme zjistili, že $r_{3n} \to +\infty$.

Podobně jako v předchozím příkladu bychom ukázali, že $r_n \to +\infty$, tzn.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots = +\infty.$$

□

Poznámka

Lze ukázat, že původní (nepřerovnaná) řada je (podle Leibnizova kritéria) konvergentní (přibližná hodnota součtu je $0,604899$). Přerovnaná řada je divergentní (má součet nekonečno). Opět je to způsobeno neabsolutní konvergencí původní řady.

Animace 3

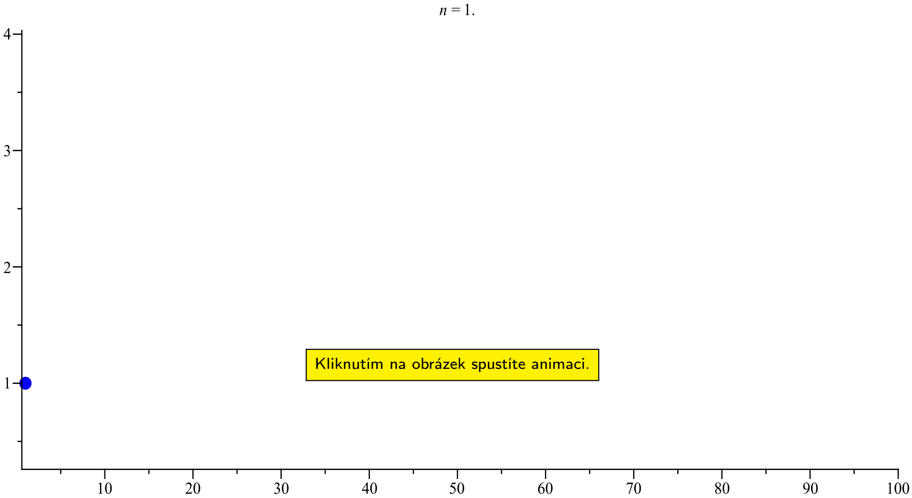
$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\dots \qquad 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\dots$$

Animace 3

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\dots \neq 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\dots$$

Animace 3

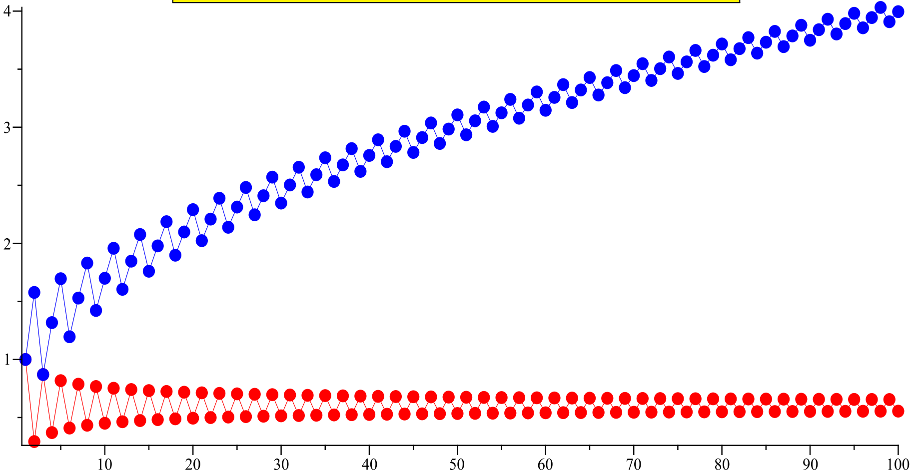
$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\dots \neq 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\dots$$



V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\dots\neq 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\dots$$

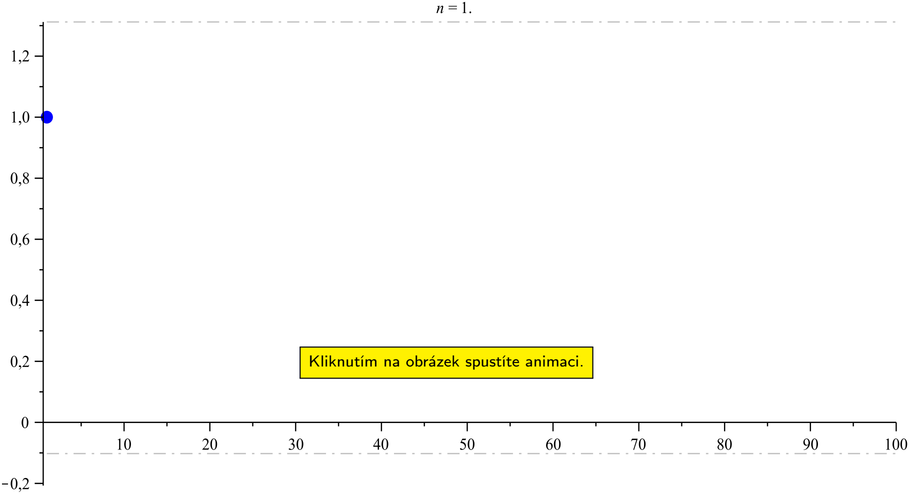
Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Animace 4 (další přerovnání řady $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\dots$)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{17}}-\dots$$

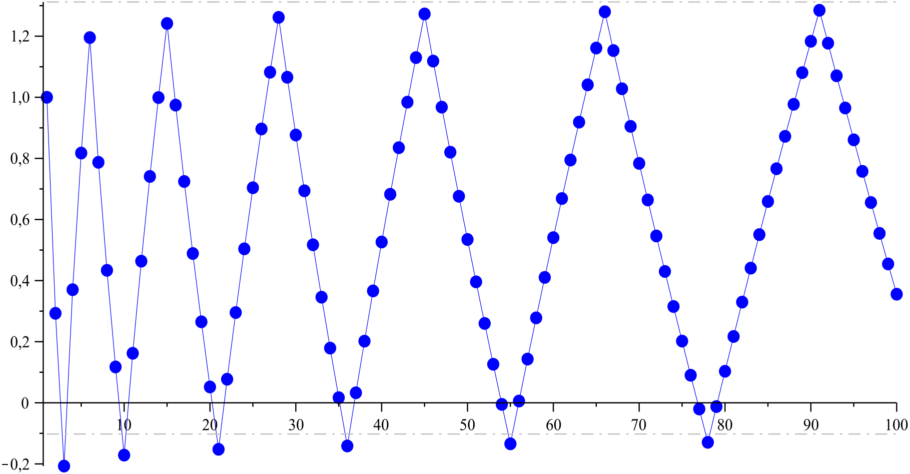
$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$



V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

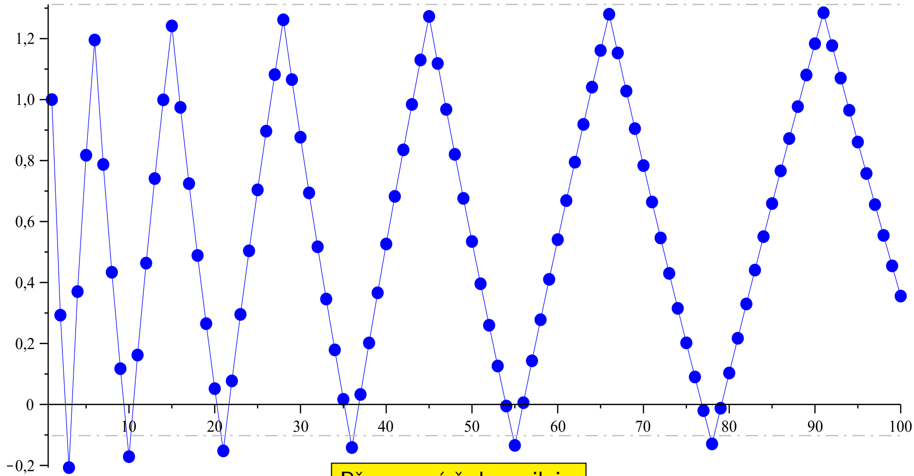
$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Přerovnaná řada osciluje.

Příklad

Uvažujme řadu

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{12^2}+\dots$$

a její přerovnání

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}-\frac{1}{8^2}+\dots.$$

Určete, v jakém vztahu jsou součty obou řad.

Příklad

Uvažujme řadu

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{12^2}+\dots$$

a její přerovnání

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}-\frac{1}{8^2}+\dots.$$

Určete, v jakém vztahu jsou součty obou řad.

Řešení.

Původní řada je absolutně konvergentní (plyne například z integrálního kritéria). Proto žádným přerovnáním takové řady součet nezměníme. To znamená, že součty obou řad jsou stejné. □

Příklad

Uvažujme řadu

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{12^2}+\dots$$

a její přerovnání

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}-\frac{1}{8^2}+\dots.$$

Určete, v jakém vztahu jsou součty obou řad.

Řešení.

Původní řada je absolutně konvergentní (plyne například z integrálního kritéria). Proto žádným přerovnáním takové řady součet nezměníme. To znamená, že součty obou řad jsou stejné. □

Poznámka

Lze ukázat, že

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{12^2}+\dots=\frac{\pi^2}{12}\doteq 0,822467.$$

Animace 5

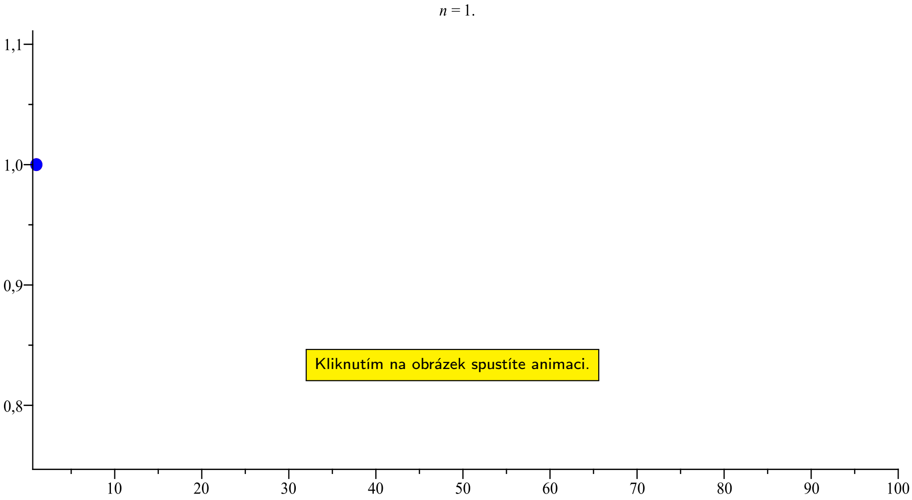
$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\dots$ $\quad$ $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\dots$

Animace 5

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\ldots=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\ldots$$

Animace 5

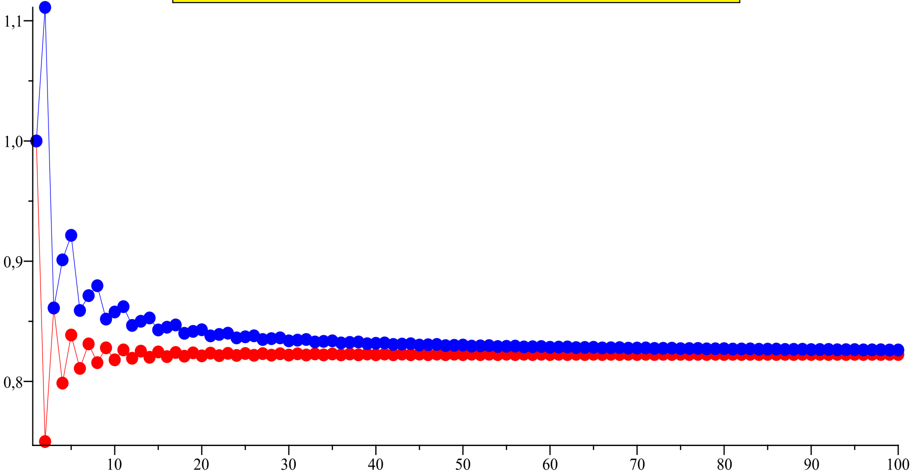
$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\ldots = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\ldots$$



V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\ldots = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\ldots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):

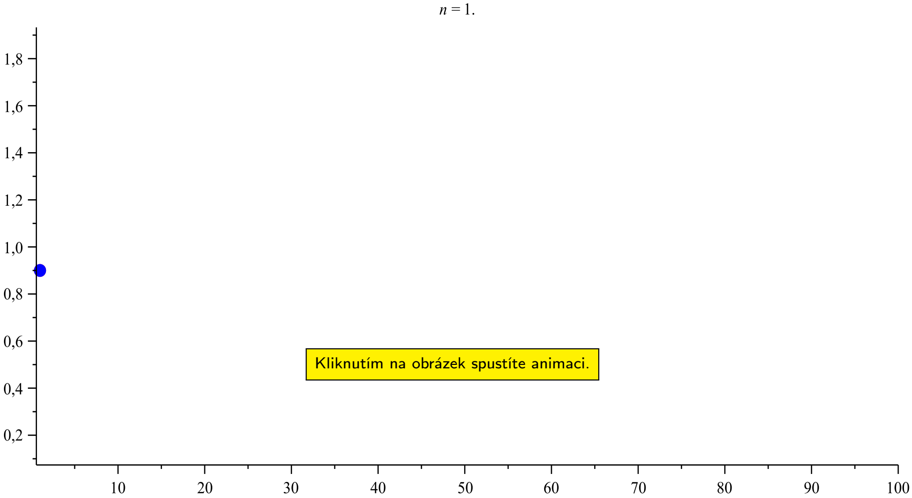


Animace 6 (Každá geometrická řada s kvocientem $q \in (-1, 1)$ je absolutně konvergentní.)

$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$ $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \dots$

$$\left(\tfrac{9}{10}\right)^1 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^3 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^7 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^4 + \dots = \left(\tfrac{9}{10}\right)^1 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^3 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^4 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 - \dots$$

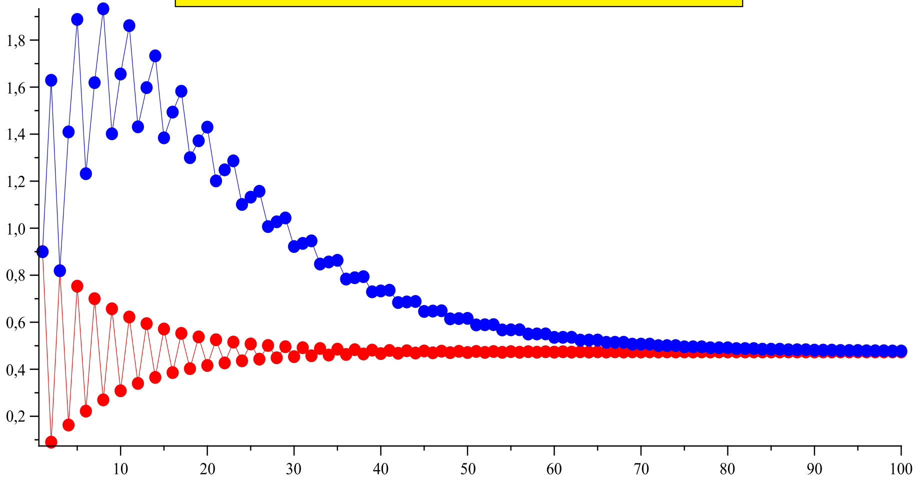
$$\left(\tfrac{9}{10}\right)^1 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^3 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^7 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^4 + \dots = \left(\tfrac{9}{10}\right)^1 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^3 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^4 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 - \dots$$



V případě problémů zkuste animaci spustit kliknutím na tento text.

$$\left(\tfrac{9}{10}\right)^1 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^3 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^7 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^4 + \dots = \left(\tfrac{9}{10}\right)^1 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^3 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^4 + \left(\tfrac{9}{10}\right)^5 - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Bonus – řada převrácených hodnot prvočísel $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\dots$

Věta

Buď $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ *posloupnost všech prvočísel. Pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Věta

Buď $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ *posloupnost všech prvočísel. Pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Důkaz.

Nechť $n \in N$, $n \geq 2$, je dáno a nechť $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která nepřevyšují n.

Věta

Buď $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ *posloupnost všech prvočísel. Pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Důkaz.

Nechť $n \in N$, $n \geq 2$, je dáno a nechť $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která nepřevyšují n. Pak

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\dots\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\dots\right)$$

Věta

Buď $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ *posloupnost všech prvočísel. Pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Důkaz.

Nechť $n \in N$, $n \geq 2$, je dáno a nechť $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která nepřevyšují n. Pak

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\dots\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

Věta

Buď $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ *posloupnost všech prvočísel. Pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Důkaz.

Nechť $n \in N$, $n \geq 2$, je dáno a nechť $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která nepřevyšují n. Pak

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\dots\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k}{p_k-1}$$

Věta

Buď $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ *posloupnost všech prvočísel. Pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Důkaz.

Nechť $n \in N$, $n \geq 2$, je dáno a nechť $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která nepřevyšují n. Pak

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\dots\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k}{p_k-1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{p_1-1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{p_2-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{1}{p_k-1}\right).$$

Důkaz.

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq\left(1+\frac{1}{p_1-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p_2-1}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right),$$

Důkaz.

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right),$$

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right),$$

dostaneme

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right),$$

dostaneme

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) \leq \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right)$$

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{p_1-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p_2-1}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right),$$

dostaneme

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) \leq \sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right) \overset{\text{obrázek}}{\leq} \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1}$$

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{p_1-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p_2-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right),$$

dostaneme

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) \leq \sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right) \overset{\text{obrázek}}{\leq} \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1} \leq 2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}.$$

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right),$$

dostaneme

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) \leq \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \overset{\text{obrázek}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}.$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \geq \frac{1}{2} \ln\big(\ln(n+1)\big)$$

□

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right),$$

dostaneme

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) \leq \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \overset{\text{obrázek}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}.$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \geq \frac{1}{2} \ln\big(\ln(n+1)\big) \longrightarrow +\infty.$$

□

Důkaz.

Zlogaritmujeme-li nerovnost

$$\ln(n+1) \overset{\text{obrázek}}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k - 1}\right),$$

dostaneme

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) \leq \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \overset{\text{obrázek}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}.$$

Odtud

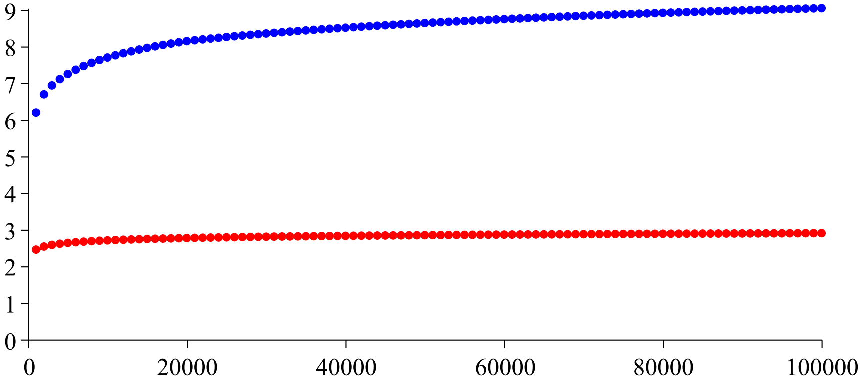
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \geq \frac{1}{2} \ln\big(\ln(n+1)\big) \longrightarrow +\infty.$$

$\square$

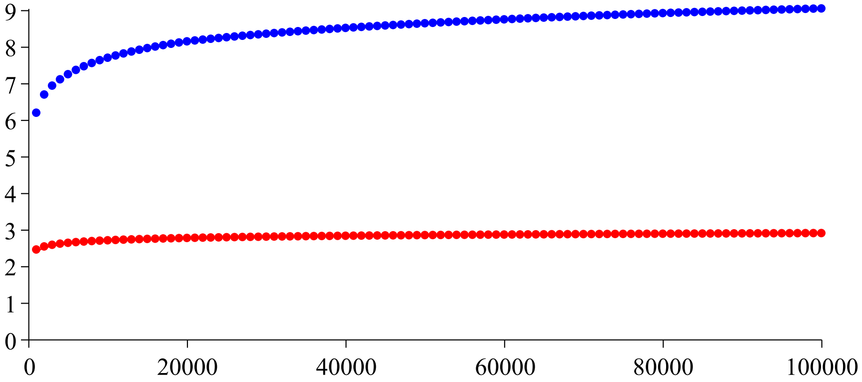
Poznámka

Řada převrácených hodnot prvočísel má součet nekonečno, ale posloupnost částečných součtů této řady roste extrémně pomalu (ještě mnohem pomaleji než posloupnost částečných součtů harmonické řady).

Srovnání grafů posloupností částečných součtů řady převrácených hodnot prvočísel a harmonické řady „s vynechanou cifrou 3“



Srovnání grafů posloupností částečných součtů řady převrácených hodnot prvočísel a harmonické řady „s vynechanou cifrou 3“



„Červená řada“ má přitom nekonečný součet, zatímco „modrá řada“ konverguje.

Literatura

Projekt „Ve světě matematických aplikací“, kapitola „Ř+A+D+Y+...“.
(https://suma.jcmf.cz/projekty/ve-svete-matematickych-aplikaci)

Děkuji za pozornost !!!