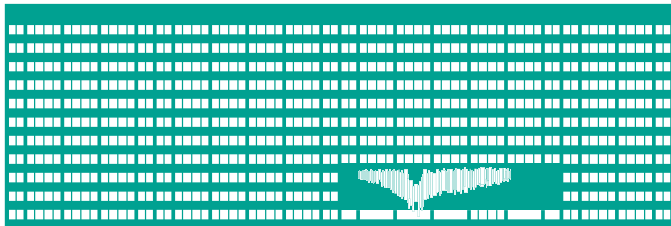


VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

VSB TECHNICAL
UNIVERSITY
OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Rubikova kostka snadno a rychle

Permutace a hlavolamy

Petr Kovář

VŠB – Technical University of Ostrava

petr.kovar@vsb.cz

MODAM 9.6. 2023, Ostrava

 VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

KATEDRA
APLIKOVANÉ
MATEMATIKY



Rubik Ernő, 1974

Disclaimer: Upřesnění názvu



Disclaimer: Zřeknutí se názvu



Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému.

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.
- Rychlejší je využít hotové nástroje.



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.
- Rychlejší je využít hotové nástroje.

Proč tato přednáška?

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.
- Rychlejší je využít hotové nástroje.

Proč tato přednáška?

- Jak postupy skládání popsat?



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.
- Rychlejší je využít hotové nástroje.

Proč tato přednáška?

- Jak postupy skládání popsat?
- Nebudeme potřebovat ani limity, ani derivace, ani integrály, ...



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.
- Rychlejší je využít hotové nástroje.

Proč tato přednáška?

- Jak postupy skládání popsat?
- Nebudeme potřebovat ani limity, ani derivace, ani integrály, ...
- Jak postupy samostatně vymyslet?

Disclaimer: Zřeknutí se názvu



„Rubikova kostka snadno?“ To asi ne...

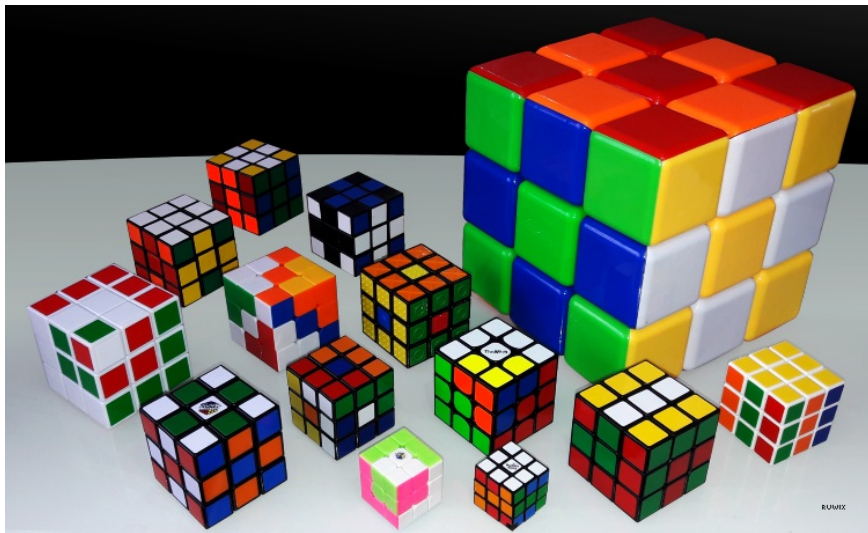
- Snadnější je najít algoritmy pro řešení na internetu. Víme, co máme dělat, jen nevíme, proč to funguje.
- Snadnější je předat úkol někomu jinému. PNJ, v originále SEP
- Snadnější je využít hotové nástroje.

Rubikova kostka rychle?

- Nejrychlejší postupy jsou známy („Gods number“ 20 tahů).
- Rychlejší je předat úkol někomu, kdo algoritmy zná.
- Rychlejší je využít hotové nástroje.

Proč tato přednáška?

- Jak postupy skládání popsat?
- Nebudeme potřebovat ani limity, ani derivace, ani integrály, ...
- Jak postupy samostatně vymyslet?
- Ukážeme myšlenku, stejnou lze využít pro mnoho hlavolamů.







Různé hlavolamy lze řešit podobně.

Rubikova kostka obtížně a zdlouhavě

Permutace a hlavolamy

Petr Kovář

VŠB – Technical University of Ostrava

petr.kovar@vsb.cz

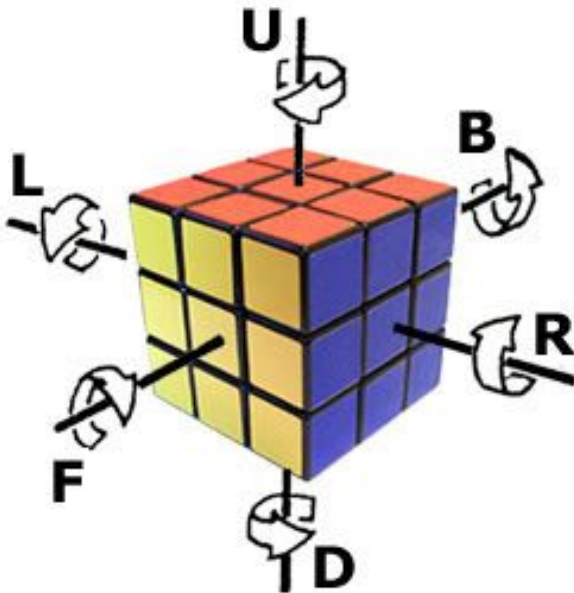
MODAM 9.6. 2023, Ostrava

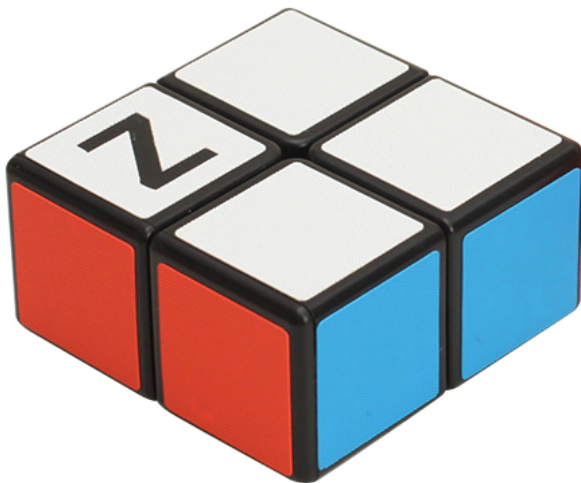


- 1 Upřesnění názvu
- 2 Popis pohybů Rubikovy kostky
 - Zcube
 - Rubikova kostka $1 \times 3 \times 3$
- 3 Skládání malých kostek
 - Zcube
 - Rubikova kostka $1 \times 3 \times 3$
 - GAP
- 4 Skládání Rubikovy kostky

Zápis pohybů Rubikovy kostky (permutace)







Zcube



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,
- „nejsložitější“ rozmíchání vyžaduje pro složení jen 3 tahy,



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,
- „nejsložitější“ rozmíchání vyžaduje pro složení jen 3 tahy,
- extrémně jednoduchý algoritmus na složení – ďáblův algoritmus.

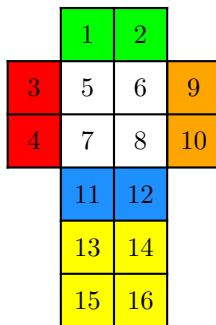


Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,
- „nejsložitější“ rozmíchání vyžaduje pro složení jen 3 tahy,
- extrémně jednoduchý algoritmus na složení – ďáblův algoritmus.

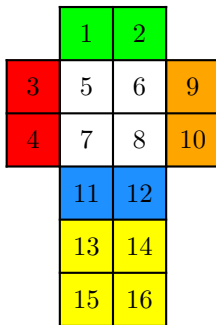
Je to šikovný hlavolam pro ukázkou vlastností a obecného popisu.

Popis tahů Zcube



Očísľujeme nálepký.

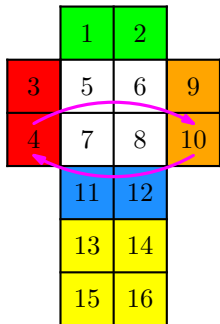
Popis tahů Zcube

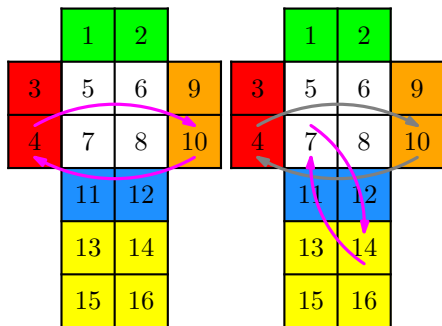


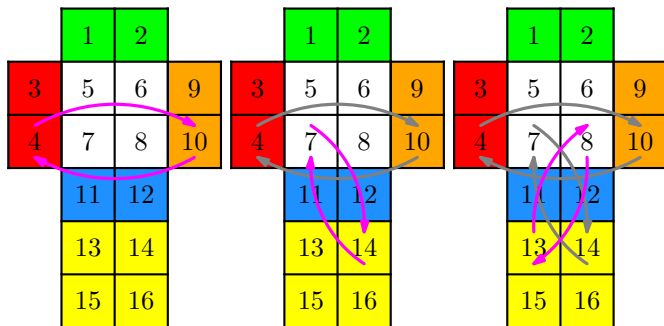
Očísľujeme nálepký.

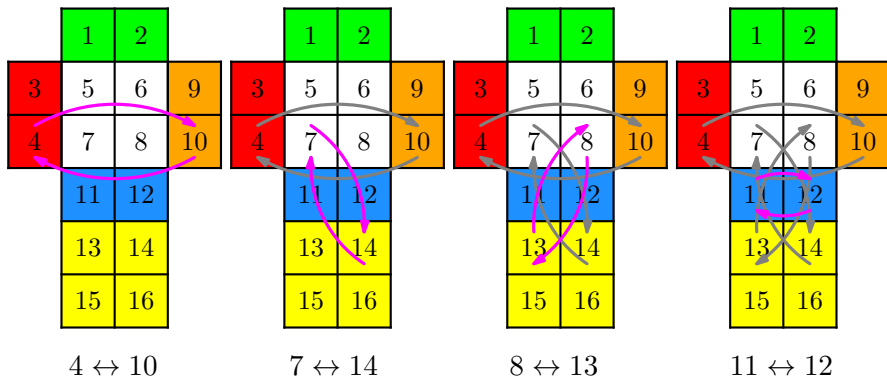
Každý pohyb odpovídá permutaci nálepek.

Permutace nakreslíme a zapíšeme.

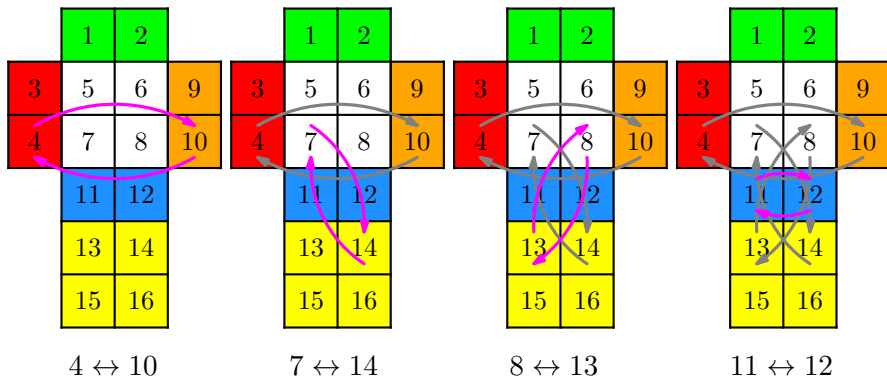
Otočení přední stěny F' 

Otočení přední stěny F 

Otočení přední stěny F 

Otočení přední stěny F 

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 10 & 14 & 13 & 4 & 12 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Otočení přední stěny F 

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 10 & 14 & 13 & 4 & 12 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12)$$

Čtyři základní pohyby



Otočení přední stěny

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12),$$

Čtyři základní pohyby



Otočení přední stěny

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12),$$

Otočení zadní stěny

$$B = (1\ 2)(3\ 9)(5\ 16)(6\ 15),$$

Čtyři základní pohyby



Otočení přední stěny

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12),$$

Otočení zadní stěny

$$B = (1\ 2)(3\ 9)(5\ 16)(6\ 15),$$

Otočení pravé a levé stěny

$$R = (2\ 12)(6\ 14)(8\ 16)(9\ 10),$$

$$L = (1\ 11)(3\ 4)(5\ 13)(7\ 15).$$



Zcube

- 4 otočení stěn,
- 6 různých rozmíchání,
- 24 pokud počítáme převrácení hlavolamu jako další rozmíchání,
- maximálně 3 tahy (pro jediné rozmíchání).



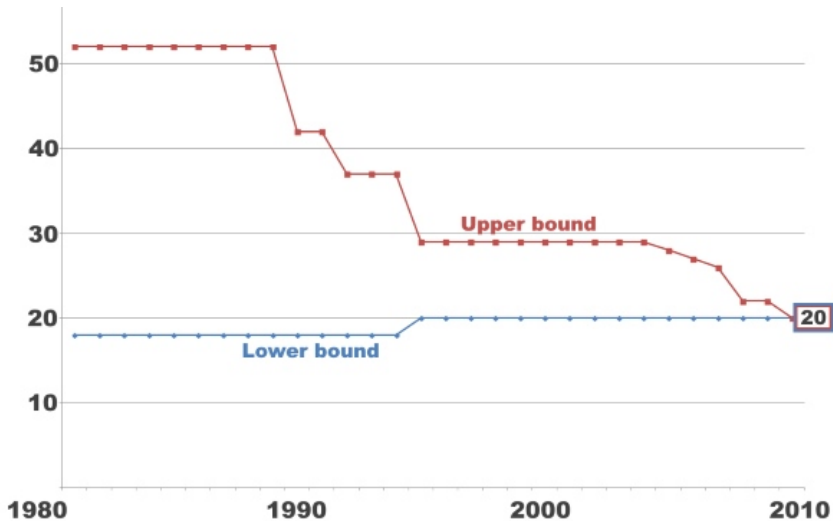
Zcube

- 4 otočení stěn,
- 6 různých rozmíchání,
- 24 pokud počítáme převrácení hlavolamu jako další rozmíchání,
- maximálně 3 tahy (pro jediné rozmíchání).

Rubikova kostka

- 6 různých otočení,
- 43 252 003 274 489 856 000 různých rozmíchání,
($43 \cdot 10^{18}$, 43 triliónů)
- maximálně 20 tahů má stačit (pro 490 miliónů rozmíchání).

Historie „Božského čísla“



Ďáblův algoritmus

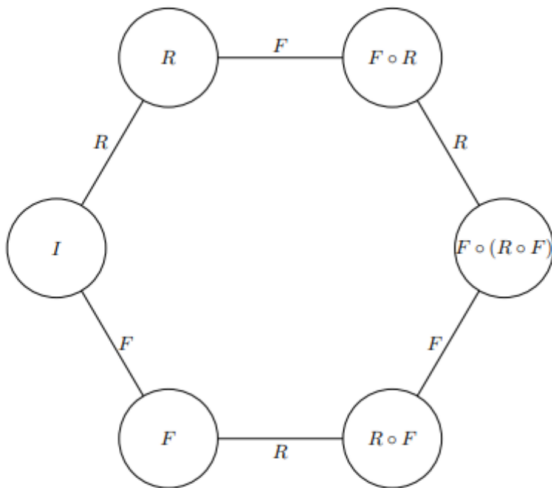


Posloupnost šesti tahů R, F, R, F, R, F projde všechna rozmíchání.

Ďáblův algoritmus



Posloupnost šesti tahů R, F, R, F, R, F projde všechna rozmíchání.



Ďáblovým algoritmem lze kostku dříve nebo později složit.

Ďáblův algoritmus

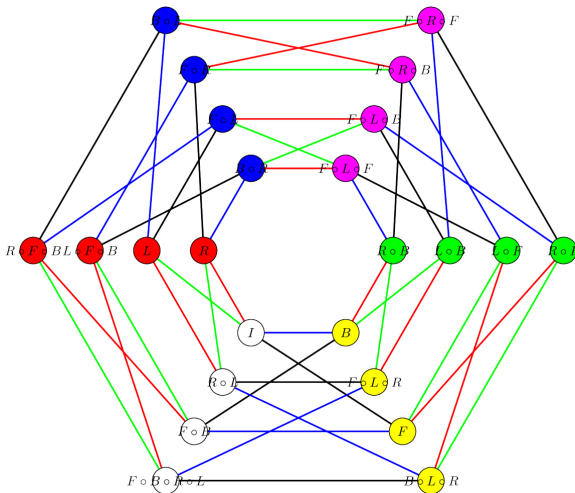


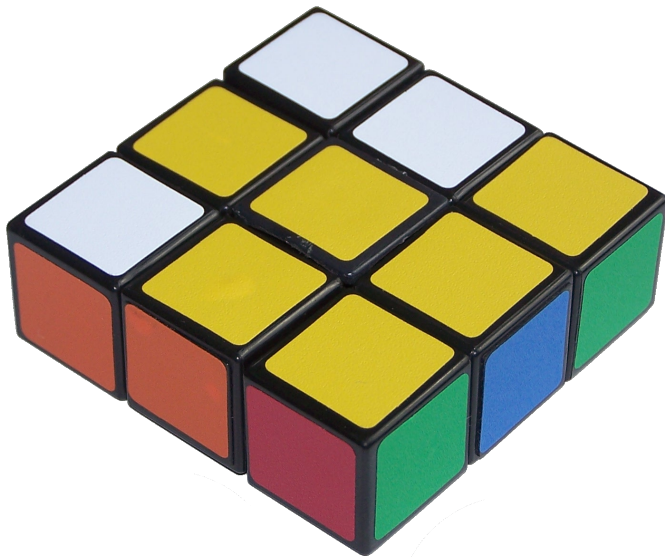
Kombinací otočení všech čtyř stěn až 24 stavů, některé ekvivalentní.

Ďáblův algoritmus

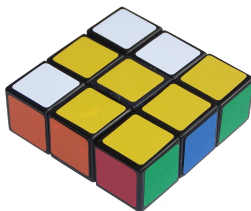


Kombinací otočení všech čtyř stěn až 24 stavů, některé ekvivalentní.



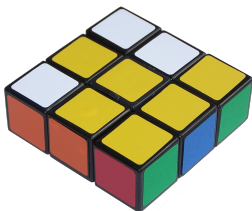


Floppy cube.



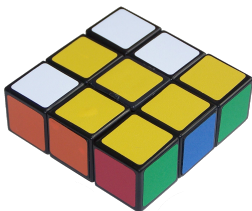
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,



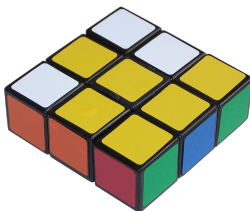
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,



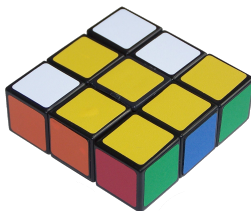
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,
- středový dílek fixujeme, 4 různá otočení,



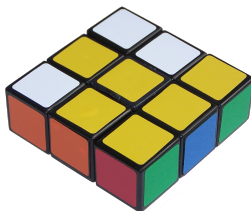
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,
- středový dílek fixujeme, 4 různá otočení,
- „nejsložitější“ rozmíchání, které vyžaduje 8 tahů („God's number“),



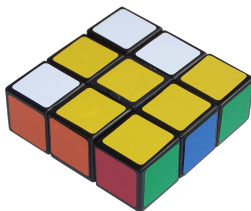
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,
- středový dílek fixujeme, 4 různá otočení,
- „nejsložitější“ rozmíchání, které vyžaduje 8 tahů („God's number“), například F, R, L, B, R, F, B, L
- rohové dílky nelze na místě otočit:
na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou „opačně“ otočené.



Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,
- středový dílek fixujeme, 4 různá otočení,
- „nejsložitější“ rozmíchání, které vyžaduje 8 tahů („God's number“), například F, R, L, B, R, F, B, L
- rohové dílky nelze na místě otočit:
na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou „opačně“ otočené.
- hranové/stěnové dílky lze otočit pouze v páru:
otočit lze 0, dva nebo 4 hranové dílky, tzv. „sudé permutace“.



Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,
- středový dílek fixujeme, 4 různá otočení,
- „nejsložitější“ rozmíchání, které vyžaduje 8 tahů („God's number“), například F, R, L, B, R, F, B, L
- rohové dílky nelze na místě otočit:
na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou „opačně“ otočené.
- hranové/stěnové dílky lze otočit pouze v páru:
otočit lze 0, dva nebo 4 hranové dílky, tzv. „sudé permutace“.
Legálními tahy nelze otočit **lichý** počet hranových dílků.



Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- 192 různých rozmíchání,
- středový dílek fixujeme, 4 různá otočení,
- „nejsložitější“ rozmíchání, které vyžaduje 8 tahů („God's number“), například F, R, L, B, R, F, B, L
- rohové dílky nelze na místě otočit:
na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou „opačně“ otočené.
- hranové/stěnové dílky lze otočit pouze v páru:
otočit lze 0, dva nebo 4 hranové dílky, tzv. „sudé permutace“.
Legálními tahy nelze otočit **lichý** počet hranových dílků.

Jaký je celkový počet možných rozmíchání s uvažováním změny tvaru?

Popis čtyř tahů Floppy cube



	1	2	3	
4	7	8	9	16
5	10	11	12	17
6	13	14	15	18
	19	20	21	
	22	23	24	
	25	26	27	
	28	29	30	

Popis čtyř tahů Floppy cube



	1	2	3	
4	7	8	9	16
5	10	11	12	17
6	13	14	15	18
	19	20	21	
	22	23	24	
	25	26	27	
	28	29	30	

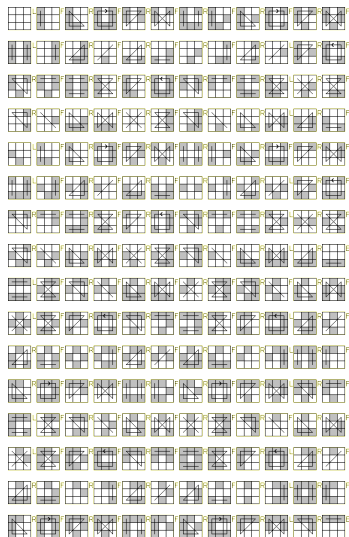
$$F = (6\ 18)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 22)(19\ 21),$$

$$B = (1\ 3)(4\ 16)(7\ 30)(8\ 29)(9\ 28),$$

$$L = (1\ 19)(4\ 6)(7\ 22)(10\ 25)(13\ 28),$$

$$R = (3\ 21)(9\ 24)(12\ 27)(15\ 30)(16\ 18).$$

Je znám Ďáblův algoritmus



Ďáblův algoritmus má 192 tahů.

Skládání malých kostek (symetrie)

Jak poskládat Zcube?



Jak poskládat Zcube?



Pokus – omyl?

Jak poskládat Zcube?



Pokus – omyl? Spíš pokus – úspěch!

Jak poskládat Zcube?



Pokus – omyl? Spíš pokus – úspěch!

- Jeden (libovolný) dílek zvolíme a pevně uchopíme.

Jak poskládat Zcube?



Pokus – omyl? Spíš pokus – úspěch!

- Jeden (libovolný) dílek zvolíme a pevně uchopíme.
- Postupně střídavě otáčíme zbývající stěny.

Jak poskládat Zcube?



Pokus – omyl? Spíš pokus – úspěch!

- Jeden (libovolný) dílek zvolíme a pevně uchopíme.
- Postupně střídavě otáčíme zbývající stěny.
- Například R, F, R, F, R, F

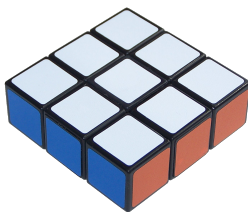
Jak poskládat Zcube?



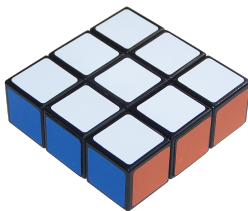
Pokus – omyl? Spíš pokus – úspěch!

- Jeden (libovolný) dílek zvolíme a pevně uchopíme.
- Postupně střídavě otáčíme zbývající stěny.
- Například R, F, R, F, R, F
- Dostaneme všech 6 různých rozmíchání, mezi nimi právě jednou poskládaná Zcube.

Jak poskládat Floppy cube?

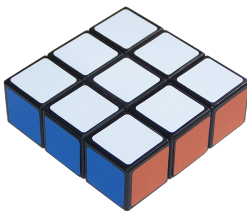


Jak poskládat Floppy cube?



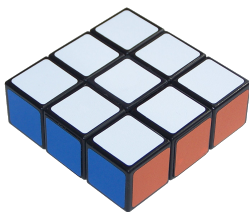
- Středový dílek pevně zafixovaný.

Jak poskládat Floppy cube?



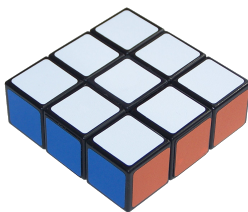
- Středový dílek pevně zafixovaný.
- Hranové dílky nelze přesunovat, jen otáčet.

Jak poskládat Floppy cube?



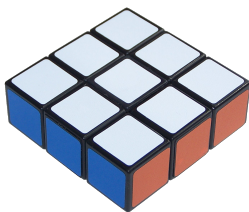
- Středový dílek pevně zafixovaný.
- Hranové dílky nelze přesunovat, jen otáčet.
- Postupným otáčením čtyř stěn (R, L, F, B) posuneme rohové dílky na místo.

Jak poskládat Floppy cube?



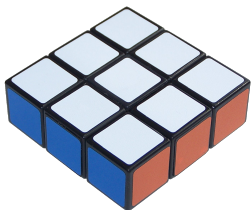
- Středový dílek pevně zafixovaný.
- Hranové dílky nelze přesunovat, jen otáčet.
- Postupným otáčením čtyř stěn (R, L, F, B) posuneme rohové dílky na místo.
- Připomínám: rohové dílky nelze špatně otočit na správném místě!

Jak poskládat Floppy cube?



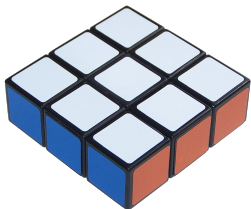
- Středový dílek pevně zafixovaný.
- Hranové dílky nelze přesunovat, jen otáčet.
- Postupným otáčením čtyř stěn (R, L, F, B) posuneme rohové dílky na místo.
- Připomínám: rohové dílky nelze špatně otočit na správném místě!
- Pokud jsou i hranové dílky správně otočeny, jsme hotovi.

Jak poskládat Floppy cube?



- Pokud ne (2 nebo 4 dílky otočeny jinak), otočíme dva hranové dílky současně.

Jak poskládat Floppy cube?



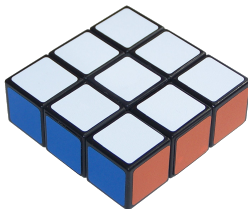
- Pokud ne (2 nebo 4 dílky otočeny jinak), otočíme **dva hranové dílky současně**.

Využijeme znalost Zcube: d'áblův algoritmus R, F, R, F, R, F

- 6 kroků postupně rozmíchá a vrátí rohové dílky zpět,
- hranové dílky na R a F otočí $3\times$ (d'áblův algoritmus je **otočí**).



Jak poskládat Floppy cube?



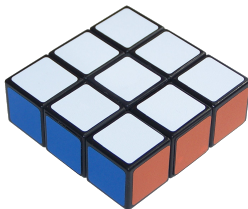
- Pokud ne (2 nebo 4 dílky otočeny jinak), otočíme **dva hranové dílky současně**.

Využijeme znalost Zcube: d'áblův algoritmus R, F, R, F, R, F

- 6 kroků postupně rozmíchá a vrátí rohové dílky zpět,
- hranové dílky na R a F otočí $3 \times$ (d'áblův algoritmus je **otočí**).
- Případně otočíme další dvojici sousedních hranových dílků.



Jak poskládat Floppy cube?



- Pokud ne (2 nebo 4 dílky otočeny jinak), otočíme **dva hranové dílky současně**.

Využijeme znalost Zcube: d'áblův algoritmus R, F, R, F, R, F

- 6 kroků postupně rozmíchá a vrátí rohové dílky zpět,
 - hranové dílky na R a F otočí $3 \times$ (d'áblův algoritmus je **otočí**).
- Případně otočíme další dvojici sousedních hranových dílků.

Všimněte si:

- Nezávisle řešíme zvlášť hranové a zvlášť rohové dílky.
- Využíváme toho, že některá „rozmíchání“ nelze dosáhnout.



Proč popis pomocí cyklů?

- je stručný a přehledný,
- poskytuje další informace: řád permutace,
- standard i pro popis v programu GAP.

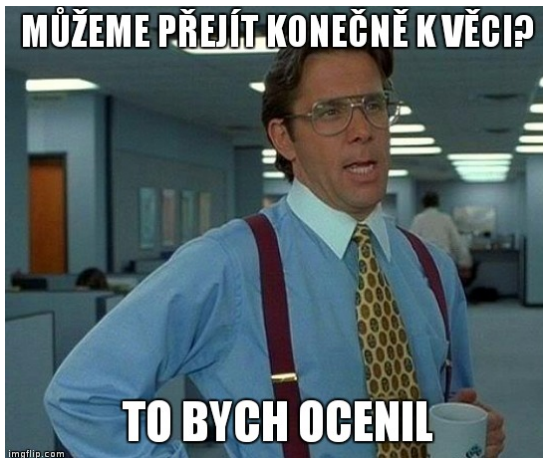


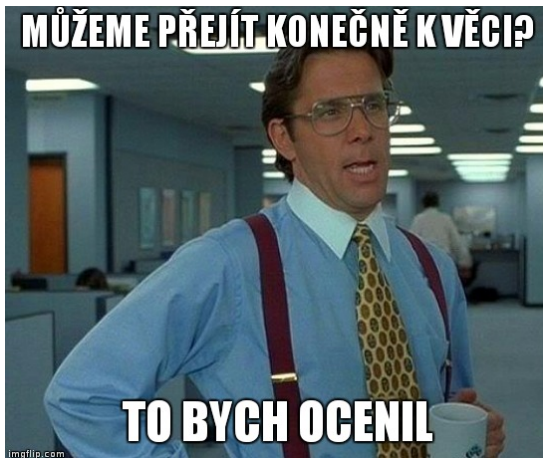
Proč popis pomocí cyklů?

- je stručný a přehledný,
- poskytuje další informace: řád permutace,
- standard i pro popis v programu GAP.

Využití v GAPu:

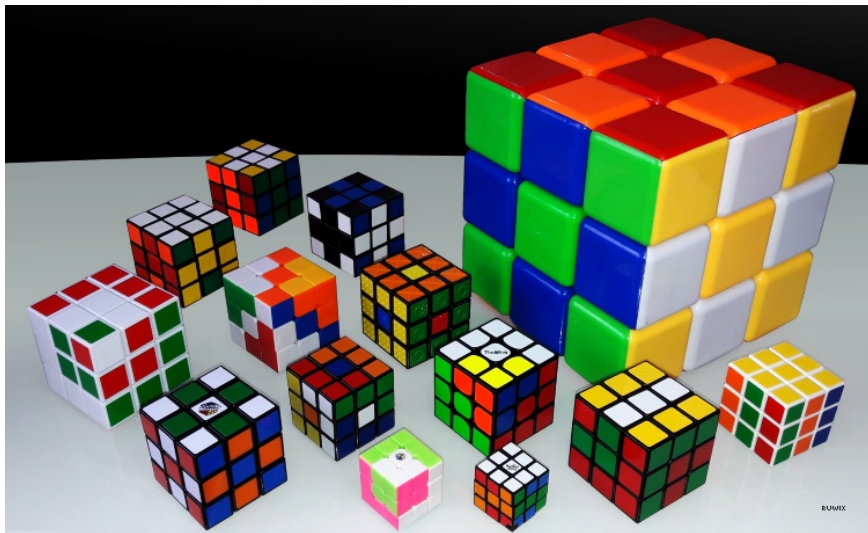
```
gap> G:=SymmetricGroup(30);  
Sym( [ 1 .. 30 ] )  
gap> F:=(6,18)(13,24)(14,23)(15,22)(19,21);  
gap> B:=(1,3)(4,16)(7,30)(8,29)(9,28);  
gap> L:=(1,19)(4,6)(7,22)(10,25)(13,28);  
gap> R:=(3,21)(9,24)(12,27)(15,30)(16,18);  
gap> K:=Subgroup(G, [R,L,F,B]);  
gap> Order(K);  
192
```





Chceme opravdickou Rubikovu kostku!

Skládání Rubikovy kostky



Mějme jakoukoliv Rubikovu kostku, tužku a papír.

Předpokládáme

Předpokládáme

- některé z 43 252 003 274 489 856 000 přípustných rozmíchání,



Předpokládáme

- některé z 43 252 003 274 489 856 000 přípustných rozmíchání,



- 6 otočení F, B, R, L, U, D a 6 proti směru F', B', R', L', U', D' ,

Předpokládáme

- některé z 43 252 003 274 489 856 000 přípustných rozmíchání,



- 6 otočení F, B, R, L, U, D a 6 proti směru F', B', R', L', U', D' ,
- umíme **sestavit první vrstvu**.



Náš postup nebude nejrychlejší možný







Jak vymyslet vlastní algoritmy?

Dvě klíčová pozorování



První jednoduché(!) pozorování:

Dvě klíčová pozorování



První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,
- 3 posloupnost tahů pozpátku udělá opačnou změnu (s jiným dílkem).



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,
- 3 posloupnost tahů pozpátku udělá opačnou změnu (s jiným dílkem).
- 4 **Zbývající část kostky se nejprve rozhází (1) a pak složí (3) zpět!**



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů T_1, T_2, \dots, T_n ,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,
- 3 posloupnost tahů pozpátku udělá opačnou změnu (s jiným dílkem).
- 4 **Zbývající část kostky se nejprve rozhází (1) a pak složí (3) zpět!**

Pár příkladů.

Otočení rohového dílku



Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'DRD'R'DR$.

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'DRD'R'DR$.

Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevadí!**

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'DRD'R'DR$.
Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevadí!**
- Pootočíme horní vrstvu v požadovaném směru U , U' nebo $2U$.

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'DRD'R'DR$.
Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevadí!**
- Pootočíme horní vrstvu v požadovaném směru U , U' nebo $2U$.
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku $R'D'RDR'D'R$.

Otočení rohového dílku

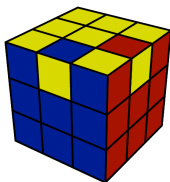


Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

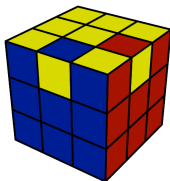
Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'DRD'R'DR$.
Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevdí!**
- Pootočíme horní vrstvu v požadovaném směru U , U' nebo $2U$.
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku $R'D'RDR'D'R$.
Rozházení zbývajících vrstev **se opraví!** Zbývá otočit U .

Otočení hranového dílku



Otočení hranového dílku

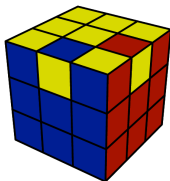


Pozor: opět nelze otočit **jen jeden** hranový dílek.
Vždy **alespoň dva!**.

Chceme například otočit (UF) a (UR).

- otočíme (UF); například $RL'F^2R'LDRL'F'R'L$,

Otočení hranového dílku

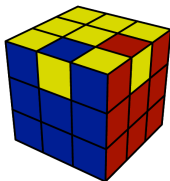


Pozor: opět nelze otočit **jen jeden** hranový dílek.
Vždy **alespoň dva!**.

Chceme například otočit (UF) a (UR).

- otočíme (UF); například $RL'F^2R'LDRL'F'R'L$,
- otočíme horní vrstvu ve směru U (otočí se ještě UR)),

Otočení hranového dílku



Pozor: opět nelze otočit **jen jeden** hranový dílek.
Vždy **alespoň dva!**.

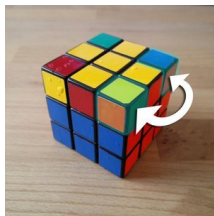
Chceme například otočit (UF) a (UR).

- otočíme (UF); například $RL'F^2R'LDRL'F'R'L$,
- otočíme horní vrstvu ve směru U (otočí se ještě UR)),
- postup z prvního kroku pozpátku $L'RF LR'D'L'RF^2LR'U'$.

Prohození dvou rohových dílků



Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).

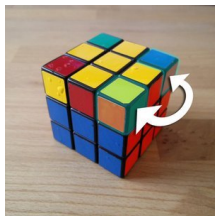
Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .

Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje. . .

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku: $(ULF) \leftrightarrow (URF)$.

Celkově prohodí **tři dílky**: (ULF), (URF) a (URB).

- Prohodíme (URF) a (URB); například $B'D'BD'R'DRD^2RD'R'$.



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

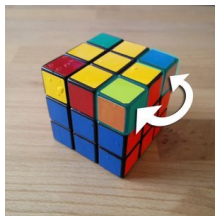
- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku: $(ULF) \leftrightarrow (URF)$.

Celkově prohodí **tři dílky**: (ULF), (URF) a (URB).

- Prohodíme (URF) a (URB); například $B'D'BD'R'DRD^2RD'R'$.
- Otočíme horní vrstvu ve směru U .



Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku: $(ULF) \leftrightarrow (URF)$.

Celkově prohodí **tři dílky**: (ULF), (URF) a (URB).

- Prohodíme (URF) a (URB); například $B'D'BD'R'DRD^2RD'R'$.
- Otočíme horní vrstvu ve směru U .
- Postup z prvního kroku pozpátku $RDR'D^2R'D'RDB'DB + U'$.



Analogicky:

- prohození hranových dílků,



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ...



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)

Shrnutí:

- máme některé z přípustných rozmíchání,



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)

Shrnutí:

- máme některé z přípustných rozmíchání,
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)

Shrnutí:

- máme některé z přípustných rozmíchání,
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu**.



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)

Shrnutí:

- máme některé z přípustných rozmíchání,
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu**.

Pak můžeme objevit složitější algoritmy.



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)

Shrnutí:

- máme některé z přípustných rozmíchání,
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu**.

Pak můžeme objevit složitější algoritmy.

Skoro jistě ne nejrychlejší, asi ne elegantní,



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových(!) dílků
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud nemění tvar)

Shrnutí:

- máme některé z přípustných rozmíchání,
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu**.

Pak můžeme objevit složitější algoritmy.

Skoro jistě ne nejrychlejší, asi ne elegantní, ale **naše**.



Zkuste sami.



Děkuji za pozornost.

Děkuji za pozornost

Petr Kovář

VŠB – Technical University of Ostrava

petr.kovar@vsb.cz

MODAM 9.6. 2023, Ostrava

 VŠB	TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA	FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY	KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY
---------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------------------	-------------------------------------