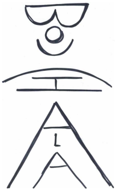
Ř+A+D+Y+...

Jiří Bouchala



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

9. června 2023, přednáška v semináři MODAM

Pučící nekonečno

Nekonečno je těžko uchopitelné

- n-karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

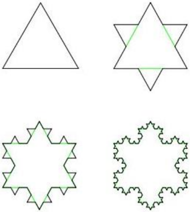
- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

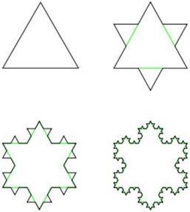
  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka



- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka

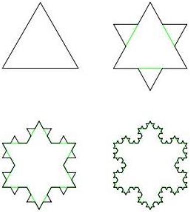


$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka



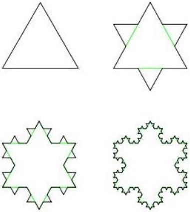
$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x =$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

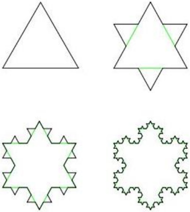


$$\text{obsah } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \ldots$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka



$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = \textcolor{red}{?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = \textcolor{red}{?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,\textcolor{red}{1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14\textcolor{red}{1592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,14\textcolor{red}{15}9\textcolor{red}{26}\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = \textcolor{red}{?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = \textcolor{red}{?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,\textcolor{red}{1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14\textcolor{red}{1592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,141\textcolor{red}{5}9\textcolor{red}{26}\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3, 1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14{\color{red}1592}6...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,141{\color{red}5926}...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = {\color{red}3},1415926...$ počet Krokových dcer

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14{\color{red}1592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,141{\color{red}5926}\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = {\color{red}3},1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,141{\color{red}592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,141{\color{red}5926}\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = {\color{red}3},1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1{\color{red}415}926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,{\color{red}1415926}\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14{\color{red}1592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,141{\color{red}5926}\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = {\color{red}3},1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1{\color{red}415}926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,{\color{red}14}15{\color{red}92}6\ldots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2}$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2}$

$$s \;= ?$$

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1),

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1).

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>součtem řady</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>součtem řady</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1) <u>konverguje</u>.

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

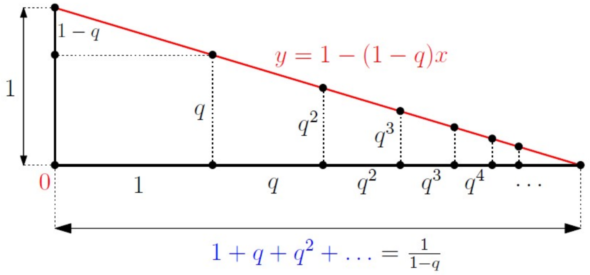
$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

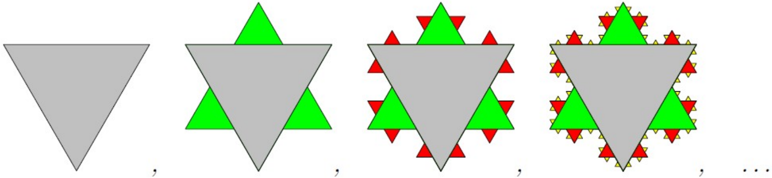
a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

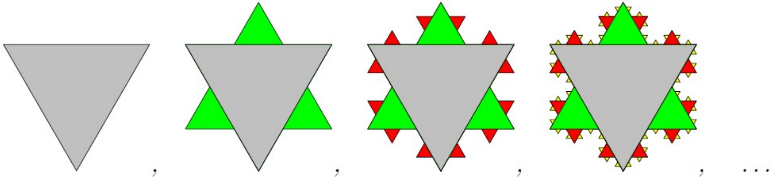


- Obsah Kochovy sněhové vločky.

- Obsah Kochovy sněhové vločky.



- Obsah Kochovy sněhové vločky.



$$obsah\ K = obsah\ T_1 + (obsah\ T_2 + obsah\ T_3 + obsah\ T_4 + \ \dots\ ) =$$

$$= 1 + \left(3 \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{1}{9^2} + 48 \cdot \frac{1}{9^3} + \ \dots\ \right) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 1 + \frac{\frac{3}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}.$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu,

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

a proto

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}n=\infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots = \infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n\to s\in\mathbb{R}\;\Rightarrow\;s_{2n}-s_n\to s-s=0.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; s_{2n} - s_n \to s - s = 0.$$

Současně ale

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad s_{2n}-s_n \to s-s=0.$$

Současně ale

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}(2n-n)=\frac{1}{2},$$

a to je spor.

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \, .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

a proto pro posloupnost částečných součtů (s_n) a každé $n \geq 2$ platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

a proto pro posloupnost částečných součtů (s_n) a každé $n \geq 2$ platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Odtud již snadno vyplývá, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} s_n \leq 2.$$

Dá se ukázat (L. Euler 1735), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Dá se ukázat (L. Euler 1735), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668482264364\ldots \ .$$

(Neměli bychom tajit, že důkaz tohoto tvrzení – na rozdíl od výše uvedeného důkazu konvergence – je opravdu těžký.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068,$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \doteq 1,017343063$,

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1{,}644934068$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1{,}202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1{,}082323234$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1{,}036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \doteq 1{,}017343063$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \doteq 1{,}008349277$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \doteq 1,017343063$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \doteq 1,008349277$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- ... .

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1\\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot 9^3 \cdot \frac{1}{1000} \ldots =$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak

$$\color{red}{s} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n} \color{red}{\leq} 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot 9^3 \cdot \frac{1}{1000} \ldots =$$

$$= 8 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots\right) = 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = \color{red}{80}.$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p}$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right) =$$

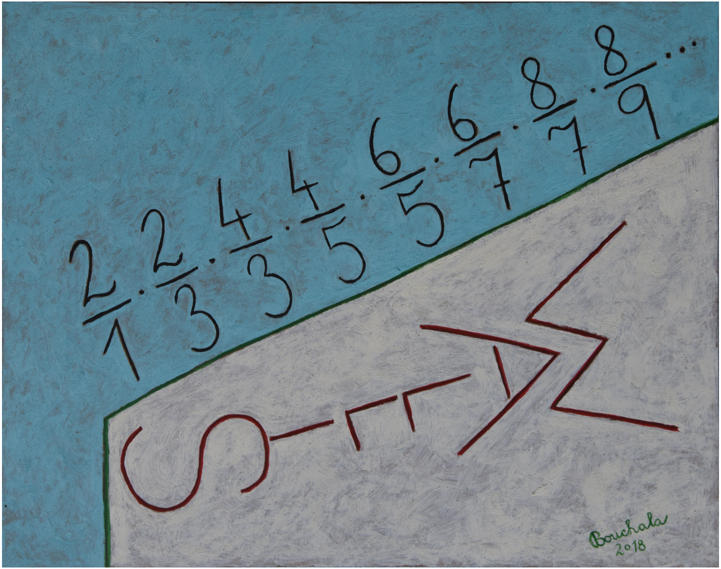
- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots = \infty.$$

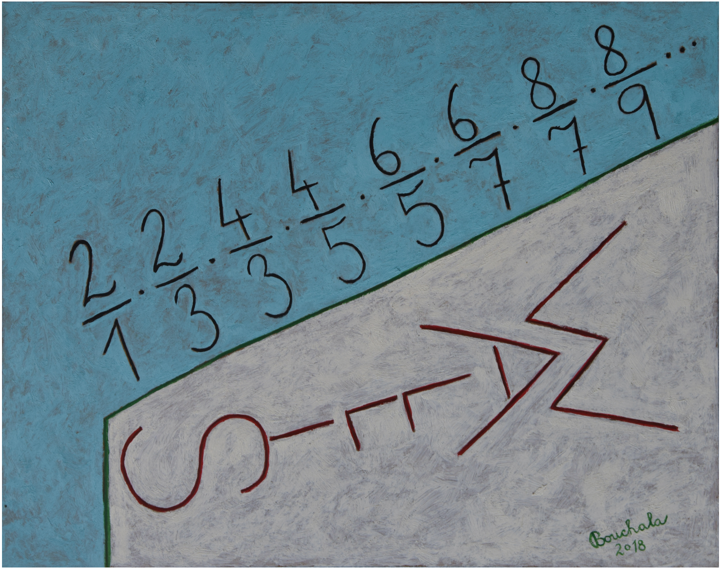
- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \ldots$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\ldots < \infty.$$


$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$
Bouchala
2018



$\frac{\pi}{2}$ na nakloněné rovině

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+ ...
  Svět matematických aplikací II,
  JČMF, Praha 2020

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+ ...
  Svět matematických aplikací II,
  JČMF, Praha 2020

MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)