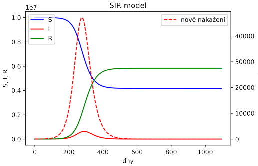
Epidemické modely

MODAM 2022



Jan Kracík

Katedra aplikované matematiky, VŠB - TUO

Přihrádkové modely v epidemiologii

Pro modelování šíření epidemií v čase se využívají přihrádkové modely (compartmental models).

Základním modelem je tzv. **SIR model**.

- Sir Ronald Ross, Hilda P. Hudson (1916 - 1917)
- William O. Kermack, Anderson O. McKendrick (1927)

Přihrádkové modely

Skupina N jedinců je rozdělena do k přihrádek.

- V každém okamžiku patří každý jedinec do právě jedné přihrádky.
- Podle daných pravidel se jedinci v čase přesouvají mezi přihrádkami.
- Modelujeme vývoj počtu jedinců v jednotlivých přihrádkách.

SIR model - přihrádky

Skupina N jedinců (10^7 obyvatel ČR).

3 přihrádky:

- $\mathcal{S}$ - náchylní (**S**usceptible) - mohou se nakazit
- $\mathcal{I}$ - infekční (**I**nfectious) - mohou nakazit ostatní
- $\mathcal{R}$ - uzdravení (**R**ecovered) - nemohou se znovu nakazit

SIR model - přihrádky

Skupina N jedinců (10^7 obyvatel ČR).

3 přihrádky:

- $\mathcal{S}$ - náchylní (**S**usceptible) - mohou se nakazit
- $\mathcal{I}$ - infekční (**I**nfectious) - mohou nakazit ostatní
- $\mathcal{R}$ - uzdravení (**R**ecovered) - nemohou se znovu nakazit

Přesuny jedinců:

- $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{I}$ - náchylný se nakazí
- $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{R}$ - nakažený se uzdraví

SIR model - veličiny

Sledujeme vývoj počtu jedinců v přihrádkách $\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}$ v závislosti na čase t.

Zjednodušení:

- Čas měříme celými čísly (ve dnech).
- Počty jedinců v přihrádkách jsou reálná čísla.

SIR model - veličiny

Sledujeme vývoj počtu jedinců v přihrádkách $\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}$ v závislosti na čase t.

Zjednodušení:

- Čas měříme celými čísly (ve dnech).
- Počty jedinců v přihrádkách jsou reálná čísla.

Pro $t = 0, 1, 2, \ldots$ označme

- S_t ... počet náchylných jedinců v den t,
- I_t ... počet nakažených jedinců v den t,
- R_t ... počet uzdravených jedinců v den t.

SIR model - dynamika vývoje

Jak závisí počet jedinců v den $t+1$ na hodnotách ze dne t?

SIR model - dynamika vývoje

Jak závisí počet jedinců v den $t + 1$ na hodnotách ze dne t?

Jinak řečeno:

Kolik jedinců se během jednoho dne (průměrně) přesune mezi přihrádkami?

SIR model - přesun $\mathcal{I} \to \mathcal{R}$

Označme

- D ... průměrná doba, po kterou je jedinec infekční,
- $\gamma = \frac{1}{D}$ ... pravděpodobnost, že jedinec přestane být následující den infekční.

SIR model - přesun $\mathcal{I} \to \mathcal{R}$

Označme

- D ...průměrná doba, po kterou je jedinec infekční,
- $\gamma = \frac{1}{D}$ ...pravděpodobnost, že jedinec přestane být následující den infekční.

Pak

- γI_t je průměrný počet jedinců, kteří přestanou být následující den infekční, tj. počet přesunů z $\mathcal{I}$ do $\mathcal{R}$.

SIR model - přesun $\mathcal{S} \to \mathcal{I}$

Označme

- β . . . počet nákaz od jedince za den, jsou-li všichni ostatní náchylní.

SIR model - přesun $\mathcal{S} \to \mathcal{I}$

Označme

- β . . . počet nákaz od jedince za den, jsou-li všichni ostatní náchylní.

Pak

- $\beta \frac{S_t}{N}$ je počet nákaz od jedince za den.
  (Podíl $\frac{S_t}{N}$ odpovídá poměru náchylných v populaci.)

SIR model - přesun $\mathcal{S} \to \mathcal{I}$

Označme

- β ... počet nákaz od jedince za den, jsou-li všichni ostatní náchylní.

Pak

- $\beta \frac{S_t}{N}$ je počet nákaz od jedince za den.
  (Podíl $\frac{S_t}{N}$ odpovídá poměru náchylných v populaci.)
- $\beta \frac{I_t S_t}{N}$ je celkový počet nákaz od všech infekčních za den, tj. počet přesunů z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{I}$.

SIR model - přesun $\mathcal{S} \to \mathcal{I}$

Označme

- β . . . počet nákaz od jedince za den, jsou-li všichni ostatní náchylní.

Pak

- $\beta \frac{S_t}{N}$ je počet nákaz od jedince za den.
  (Podíl $\frac{S_t}{N}$ odpovídá poměru náchylných v populaci.)
- $\beta \frac{I_t S_t}{N}$ je celkový počet nákaz od všech infekčních za den, tj. počet přesunů z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{I}$.
- $\beta D = \frac{\beta}{\gamma}$ je celkový počet nákaz od jedince za den, jsou-li všichni ostatní náchylní, *základní reprodukční číslo*.

SIR model - parametry

Dynamika modelu závisí na parametrech β a γ.

Význam parametrů lze interpretovat také následovně:

- β je počet nových nákaz na jednoho nakaženého za den, jsou-li všichni ostatní náchylní.
- γ je počet nově uzdravených na jednoho nakaženého za den.

SIR model

Pro $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - \beta \frac{I_t S_t}{N}, \\ I_{t+1} &= I_t + \beta \frac{I_t S_t}{N} - \gamma I_t, \\ R_{t+1} &= R_t + \gamma I_t, \end{aligned}$$

kde S_0, I_0, R_0 je stav populace na začátku šíření epidemie.

SIR model - algoritmus

Algorithm 1 SIR model

Require:

S_0, I_0, R_0, N {počáteční stav, velikost populace}

β, γ {parametry modelu}

T {počet kroků simulace}

1: **for** $t = 0$ to $T - 1$ **do**
2: $\quad S_{t+1} \leftarrow S_t - \beta \frac{I_t S_t}{N}$
3: $\quad I_{t+1} \leftarrow I_t + \beta \frac{I_t S_t}{N} - \gamma I_t$
4: $\quad R_{t+1} \leftarrow R_t + \gamma I_t$,
5: **end for**

SIR model jako systém ODR

Uvažujme nyní místo diskrétního času $t \in \{0, 1, \ldots\}$ spojitě se měnící čas $t \geq 0$.

Počty jedinců v přihrádkách $\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}$ jsou nyní vyjádřeny hodnotami funkcí $S(t), I(t), R(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

SIR model jako systém ODR

Uvažujme nyní místo diskrétního času $t \in \{0, 1, \ldots\}$ spojitě se měnící čas $t \geq 0$.

Počty jedinců v přihrádkách $\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}$ jsou nyní vyjádřeny hodnotami funkcí $S(t), I(t), R(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

„Přírůstky“

$$-\beta \frac{I(t)S(t)}{N}, \ \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t), \ \gamma I(t)$$

můžeme chápat jako hodnoty *okamžité změny veličin* S, I, R *za jednotku času*, tj. jako hodnoty *derivací* $S'(t), I'(t), R'(t)$.

SIR model jako systém ODR

SIR model pro spojitý čas má nyní podobu soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -\beta \frac{I(t)S(t)}{N}, \\
I'(t) &= \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t), \\
R'(t) &= \gamma I(t),
\end{aligned}
$$

kde $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$.

Tuto soustavu neumíme řešit analyticky.

SIR model - numerické řešení Eulerovou metodou

Hledejme přibližné hodnoty řešení soustavy ve časech $t = k\Delta$, pro zvolený krok $\Delta > 0$ a $k = 0, 1, \ldots, K$.

SIR model - numerické řešení Eulerovou metodou

Hledejme přibližné hodnoty řešení soustavy ve časech $t = k\Delta$, pro zvolený krok $\Delta > 0$ a $k = 0, 1, \dots, K$.

Pro přírůstky hodnot funkcí S, I, R mezi časy $(k+1)\Delta - k\Delta$ platí

$$
\begin{aligned}
S((k+1)\Delta) - S(k\Delta) &= \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} S'(t)dt, \\
I((k+1)\Delta) - I(k\Delta) &= \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} I'(t)dt, \\
R((k+1)\Delta) - R(k\Delta) &= \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} I'(t)dt.
\end{aligned}
$$

SIR model - numerické řešení soustavy ODR

Aproximujeme-li integrály $\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} S'(t)dt$ hodnotou $\Delta S'(k\Delta)$ a obdobně pro zbývající dva integrály, dostaneme přibližné vztahy

$$
\begin{aligned}
S((k+1)\Delta) &\approx S(k\Delta) - \beta \frac{I(k\Delta)S(k\Delta)}{N}\Delta, \\
I((k+1)\Delta) &\approx I(k\Delta) + \left(\beta \frac{I(k\Delta)S(k\Delta)}{N} - \gamma I(k\Delta)\right)\Delta, \\
R((k+1)\Delta) &\approx R(k\Delta) + \gamma I(k\Delta)\Delta.
\end{aligned}
$$

Pro $\Delta = 1$ dostáváme pro přibližná řešení soustavy ODR vztahy totožné s původními rovnicemi pro diskrétní čas.

SIR model - numerické řešení Eulerovou metodou

Pro přibližné hodnoty $S_k \approx S(k), I_k \approx I(k), R_k \approx R(k)$ dostáváme iterační vztahy

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k - \beta \frac{I_k S_k}{N}, \\ I_{k+1} &= I_k + \left(\beta \frac{I_k S_k}{N} - \gamma I_k \right), \\ R_{k+1} &= R_k + \gamma I_k. \end{aligned}$$

Zkrácením kroku Δ snížíme chybu aproximace.

Ukázkové simulace

https://github.com/ea542/MODAM22

Děkuji za pozornost!