



Rozřež a slep aneb matematika pro řešení soustav s bilionem lineárních rovnic

Zdeněk Dostál

**Katedra aplikované
matematiky FEI a**

**Národní superpočítačové
centrum IT4Innovations**

VŠB-TU Ostrava



Nejstarší řešená soustava lineárních rovnic

Chiu-chang Suan-shu
(9 kapitol o aritmetice)

200 let před naším letopočtem

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26$$

Metoda fang-cheng (Gaussova eliminace)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 39 \\ 2 & 3 & 1 & | & 34 \\ 1 & 2 & 3 & | & 26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 - \frac{2}{3}r_1 \\ r_3 - \frac{1}{3}r_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 39 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & | & 8 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & | & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 - \frac{4 \times 3}{5}r_2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 39 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & | & 8 \\ 0 & 0 & \frac{36}{3} & | & 33 \end{bmatrix}$$

Obecné soustavy lineárních rovnic a jejich matice

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_i], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [b_i]$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

symetrická

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

pozitivně definitní

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} \geq 0$$

pozitivně semidefinitní

$$|i - j| > b \Rightarrow a_{ij} = 0$$

pásová

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro mnoho } i, j$$

řádká

Pracnost finitního řešení obecné soustavy

Krok Gaussovy eliminace

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 - \frac{2}{3}r_1 \\ r_3 - \frac{1}{3}r_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad 2^2 \text{ násobení, obecně } (n-1)^2$$

Úprava matice celkem

$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$ násobení

$$\int_{k-1}^k x^2 dx \leq \int_{k-1}^k k^2 dx = k^2 = \int_k^{k+1} k^2 dx \leq \int_k^{k+1} x^2 dx,$$

$$\frac{1}{3}(n-1)^3 = \int_0^{n-1} x^2 dx \leq (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 \leq \int_1^n x^2 dx = \frac{1}{3}n^3 - 1$$

$\Rightarrow$ složitost Gaussovy eliminace je $O(n^3)$,

$n = 10^{12} \Rightarrow 10^{36}$ operací



Pracnost finitního řešení velké soustavy

Gaussova eliminace

$$n = 10^{12}$$

$$10^{18} \text{ operací} \quad 1 \text{ sec}$$

$$(10^{12})^3 = 10^{36} \text{ operací} \quad 10^{18} \text{ sec} \approx 3 \times 10^{10} \text{ let} \quad \text{Bilion rovnic} \Rightarrow \text{desítky miliard let}$$

Determinanty

$$n = 100$$

$$100! > 10^{100} \text{ násobení!} \quad \text{Sto rovnic} \Rightarrow \text{věčnost}$$

$$(\ln n! \approx n \ln n - n)$$

SPD soustava

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > \mathbf{0} \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Variační formulace:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in R^n$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

Odvození:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{d})^T \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{b}^T (\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} \right) \\ &= (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{Ad} = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{d} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T \mathbf{d} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d} \in R^n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Iterační metody v R

Součet geometrické řady:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Pro $q = 1 - \lambda$, $\lambda \in (0, 1]$

$$1 + (1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 + \dots + (1 - \lambda)^k = \lambda^{-1} - (1 - \lambda)^{k+1} \lambda^{-1}$$

Aproximace řešení:

$$\lambda x = b$$

$$\hat{x} = \lambda^{-1} b = b + (1 - \lambda)b + (1 - \lambda)^2 b + \dots + (1 - \lambda)^k b + r_k b, \quad r_k = -(1 - \lambda)^{k+1} \lambda^{-1}$$

Iterační metoda:

$$x^0 = b$$

$$x^{k+1} = (1 - \lambda)x^k + b = b + (1 - \lambda)b + (1 - \lambda)^2 b + \dots + (1 - \lambda)^k b,$$

$$|x^k - \hat{x}| = |r_k b|, \quad r_k = -(1 - \lambda)^{k+1} \lambda^{-1}$$

Spektrální rozklad SPS matice

Spektrální rozklad:

Pro $\mathbf{A}$ SPS platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}, \quad \sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \geq 0$$

Identity:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}^T & \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T \\ \mathbf{I} &= \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{U}^T & (\mathbf{I} - \mathbf{A})^k &= \mathbf{U}(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^k)\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

Prosté iterace v R^n

Modifikace:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{b}, \quad \lambda_i \in (0,1]$$

$$\mathbf{U}^T \cdot, \quad \mathbf{c} = \mathbf{U}^T\mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{U}^T\mathbf{x}:$$

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \lambda_i y_i = c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Iterační metoda:

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{y}^k + \mathbf{c}$$

$$\|\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}}\| = \|\mathbf{R}_k \mathbf{c}\|, \quad \mathbf{R}_k = -(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{k+1} \mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

Původní soustava:

$$\mathbf{c} = \mathbf{U}^T\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^k = \mathbf{U}\mathbf{y}^k,$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{U}(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{y}^k + \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}^0 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$$

$$\|\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{R}_k \mathbf{b}\|, \quad \mathbf{R}_k = -(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{k+1} \mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad \|\mathbf{R}_k \mathbf{b}\| \leq (1 - \lambda_{\min})^{k+1} \lambda_{\min}^{-1} \left(= (1 - \kappa^{-1})^{k+1} \kappa, \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)$$

Optimalita prostých iterací

Nechť je dána třída matic $\mathbb{A}$ se stejnoměrně omezeným číslem podmíněnosti a počtem nenulových prvků $a_{ij} \neq 0$ na řádku,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{A} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \kappa(\mathbf{A}) \leq C$$

Potom z relací

$$\|\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{R}_k \mathbf{b}\|, \quad \|\mathbf{R}_k \mathbf{b}\| \leq (1 - \kappa^{-1})^{k+1} \kappa \|\mathbf{b}\| \leq (1 - C^{-1})^{k+1} C \|\mathbf{b}\|$$

plyne, že počet iterací k který je třeba k získání přibližného řešení je stejnoměrně omezený, takže

cena přibližného řešení je přímo úměrná počtu neznámých n



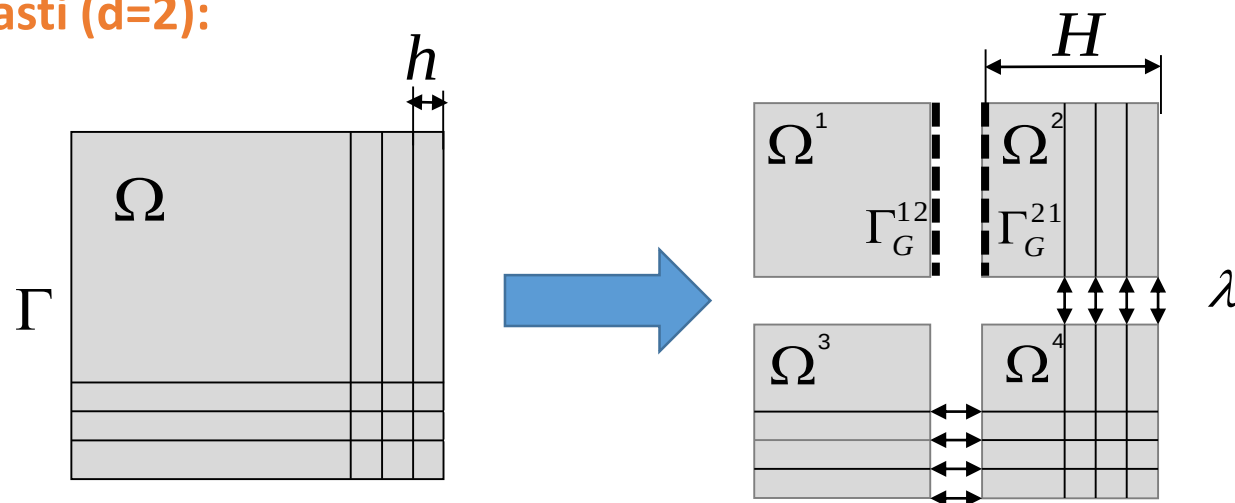
Modelová úloha a rozložení oblasti

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i^2} = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$\Omega = (0,1)^d, \quad d \in \{1,2,3\}$$

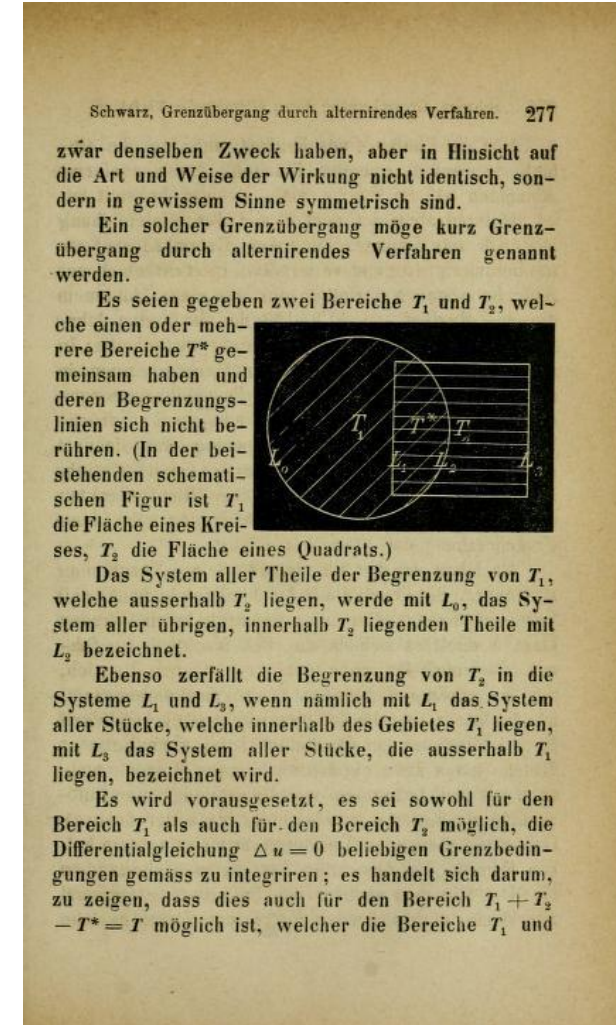
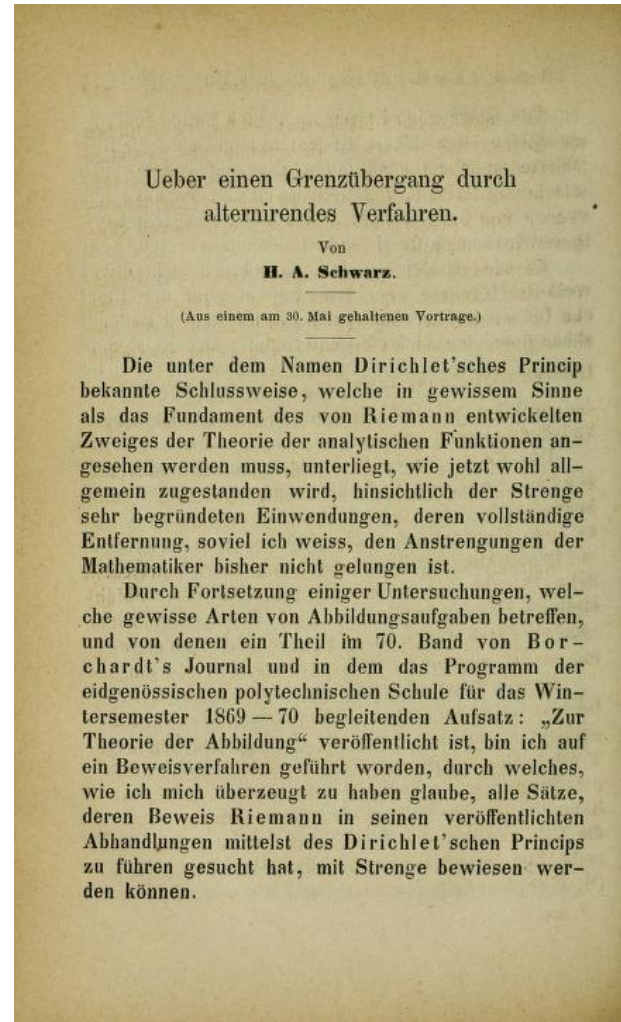
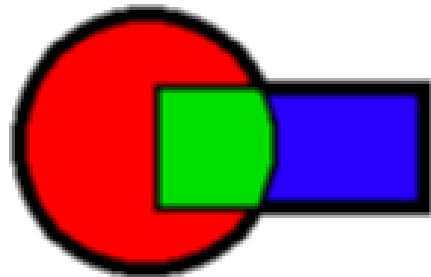
$$d=1: \quad -u'' = f, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

Rozložení oblasti (d=2):



Nová myšlenka?

H.A. Schwarz – první práce o DDM (1869)

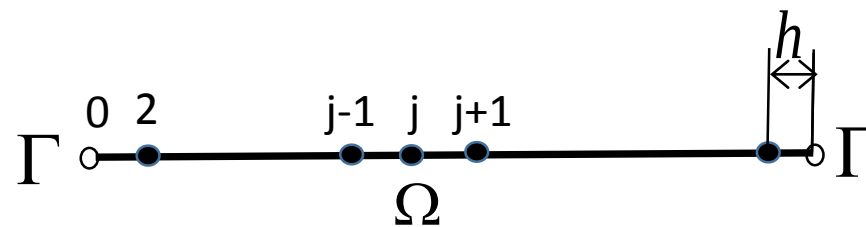


Diskretizace pro d=1

$$u''(x_j) \cong \frac{1}{h^2} (u(x_j - h) - 2u(x_j) + u(x_j + h)) = \frac{1}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \quad f(x_j) = f_j$$

$$u''(x_j) = f(x_j) \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = f_j, \quad j = 2, \dots, n-1 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v}),$$

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{f}^T \mathbf{v}$$

Diskretizace s TFETI rozložením oblasti pro $d=1$



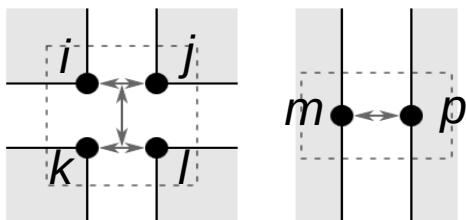
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & j & j+1 \\ & 1 & -1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

Rozložený problém:

$$\boxed{f(\hat{\mathbf{u}}) = \min_{\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{0}} f(\mathbf{u}),} \quad f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} u_j = u_{j+1} &\Leftrightarrow 1u_j + (-1)u_{j+1} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}^T \mathbf{u} = 0, \\ u_1 = 0 &\Leftrightarrow 1u_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}^T \mathbf{u} = 0, \end{aligned}$$

Matice B pro d=2



$$u_i = u_j$$

$$u_k = u_l$$

$$u_m = u_p$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} & i & j & k & l & m & p \\ & & & & & \dots 1 \dots -1 \dots & \\ \dots 1 \dots -1 \dots 0 \dots 0 \dots & & & & & & \\ \dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots -1 \dots & & & & & & \\ \dots 1 \dots 1 \dots -1 \dots -1 \dots & & & & & & \end{bmatrix}$$

Podmíněné extrémy

$$f(\hat{\mathbf{u}}) = \min_{\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{0}} f(\mathbf{u}), \quad f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} \text{ SPS}, \quad \nabla f(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}$$

Podmínka minima:

$$f(\hat{\mathbf{u}}) = \min_{\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{0}} f(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \text{existuje } \lambda \text{ tak, že}$$

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b} + \mathbf{B}^T \lambda = \mathbf{0},$$

tedy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Odvození:

$$f(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{d}) - f(\hat{\mathbf{u}}) \cong \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} \geq 0 \quad \text{pro malá } \mathbf{d} \in \text{Ker} \mathbf{B}, \text{ tedy } (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \in \text{Ker} \mathbf{B}^\perp$$

$$\mathbf{d} \in \text{Ker} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{d} = (\mathbf{B}^T \mathbf{z})^T \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \text{pro všechna } \mathbf{z}, \text{ tedy}$$

$$\text{Ker} \mathbf{B} \perp \text{Im} \mathbf{B}^T \quad \text{a} \quad \text{Ker} \mathbf{B}^\perp = \text{Im} \mathbf{B}^T$$

Zobecněné inverze a řešení konsistentních soustav

Inverzní matice:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \text{ SPD} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \text{ SPS}, \quad \mathbf{f} \in \text{Im}\mathbf{A}, \quad \text{tedy } \mathbf{f} = \mathbf{Ah}$$

Co platí pro $\mathbf{A}^+$ aby $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{f}$?

Zobecněná inverzní matice:

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{AA}^+\mathbf{f} = \mathbf{AA}^+\mathbf{Ah} = \mathbf{Ah} = \mathbf{f}$$

Příklad zobecněné inverze

Matice hodnosti $n-1$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^T & \mathbf{m}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^+ = \text{diag}(\mathbf{A}_1^+, \dots, \mathbf{A}_s^+) \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

Ověření:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^+ \mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^T & \mathbf{m}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^T & \mathbf{m}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^T & \mathbf{m}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^T & \mathbf{m}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

Redukce na hranici – vyloučení $\mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^+(\mathbf{b} - \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{b} - \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} \in \text{Im}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_s^+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{O}$$

Redukce na hranici

Algebraický zápis inkluze:

$$\mathbf{b} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \in \text{Im} \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{b} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \perp \text{Ker} \mathbf{A},$$

$$\text{tedy} \quad \mathbf{R}^T (\mathbf{b} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}) = -\mathbf{R}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R} \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Přípustné $\mathbf{u}$ implikuje podmínku na $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{B} (\mathbf{A}^+ (\mathbf{b} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{B} \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B} \mathbf{R} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B} \mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Sedlobodová úloha na hranici:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^T & -\mathbf{B} \mathbf{R} \\ -\mathbf{R}^T \mathbf{B}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \\ -\mathbf{R} \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \text{označení} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

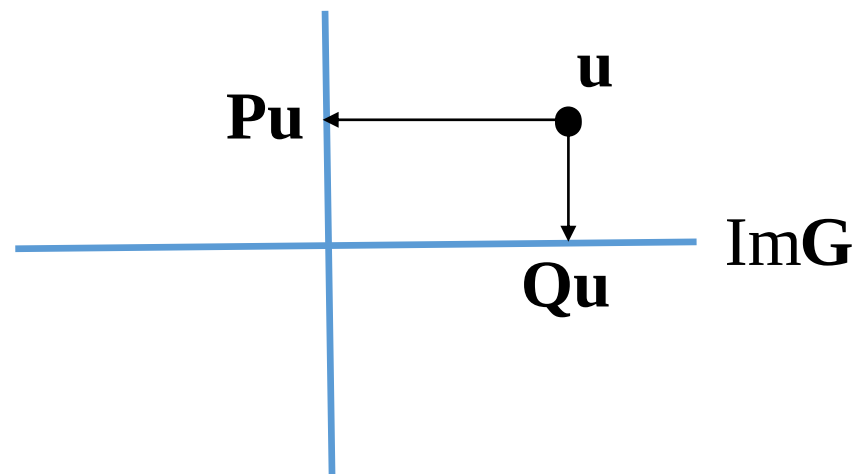
Odfiltrování α

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg \min_{\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{o}} \theta(\boldsymbol{\lambda}), \quad \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{G}, \quad \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \text{Im} \mathbf{P} = \text{Ker} \mathbf{G}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{P} \arg \min \theta(\mathbf{P} \boldsymbol{\mu})$$

$$\mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{P} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{P} \mathbf{d}$$



Co to přineslo?

Původní číslo podmíněnosti:

$$\bar{\kappa}(\mathbf{A}) \approx 1/h^2 \quad (\text{pro } n = 10^{12}, s = 20\,000: \bar{\kappa}(\mathbf{A}) \approx 10^8)$$

Číslo podmíněnosti $\mathbf{F}$ – hrubá analýza:

$$\bar{\kappa}(\mathbf{F}) = \bar{\kappa}(\mathbf{A}_i) \approx H^2 / h^2 \quad (\text{pro } n = 10^{12}, s = 20\,000: \bar{\kappa}(\mathbf{A}) \approx 2.5 \times 10^5)$$

Číslo podmíněnosti $\mathbf{F}$ – lepší analýza:

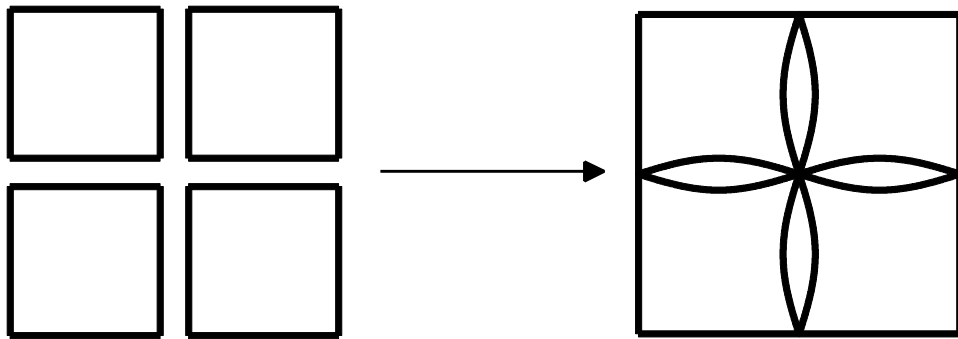
$$\bar{\kappa}(\mathbf{F}) = \bar{\kappa}(\mathbf{S}_i) \approx H / h \quad (\text{pro } n = 10^{12}, s = 20\,000: \bar{\kappa}(\mathbf{A}) \approx 5 \times 10^2)$$

Číslo podmíněnosti $\mathbf{F}$ s předpodmíněním:

$$\bar{\kappa}(\mathbf{BSB}^T \mathbf{F}) \approx 1 + \log H / h \quad (\text{pro } n = 10^{12}, s = 20\,000: \bar{\kappa}(\mathbf{A}) \approx 10)$$

Když FETI nestačí

FETI-DP



Číslo podmíněnosti F – spojení v rozích:

$$\bar{\kappa}(\mathbf{F}) = \bar{\kappa}(\mathbf{K}_i) \approx (1 + \log H / h) H / h$$

Číslo podmíněnosti F – spojení průměry na hranách:

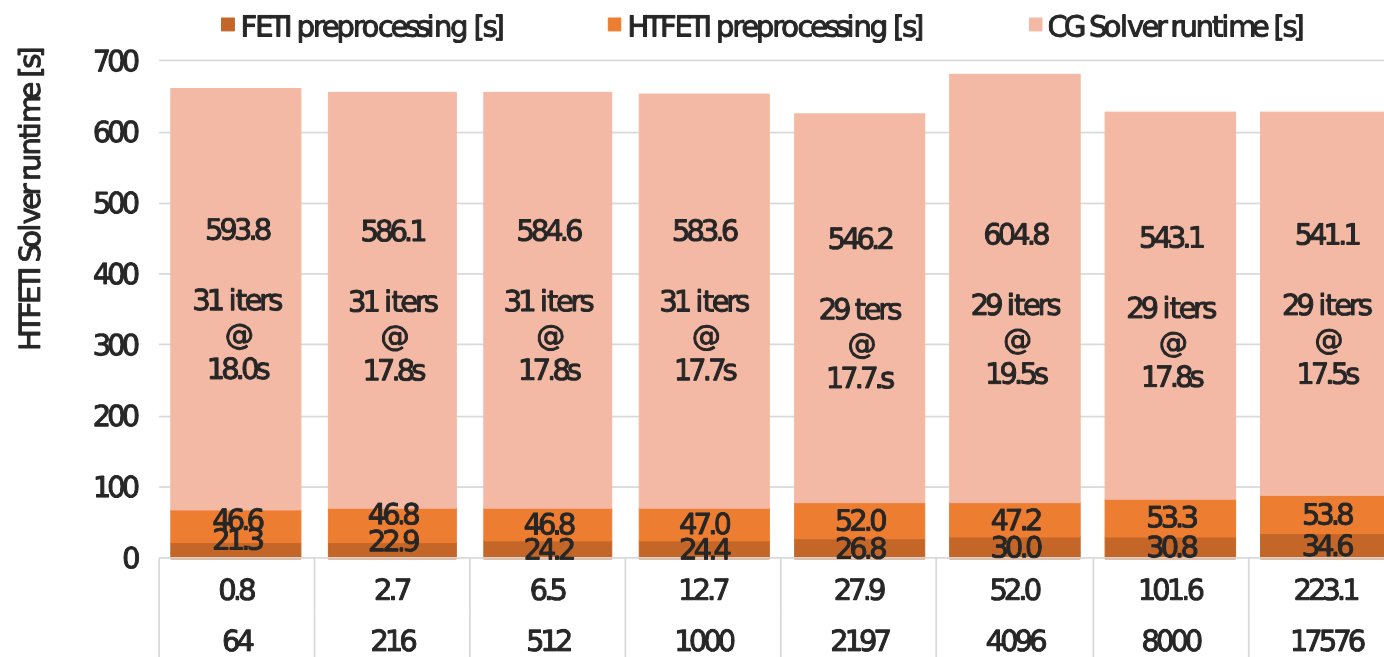
$$\bar{\kappa}(\mathbf{F}) = \bar{\kappa}(\mathbf{K}_i) \approx H / h$$

Jak to funguje doopravdy?

Weak Scalability Test

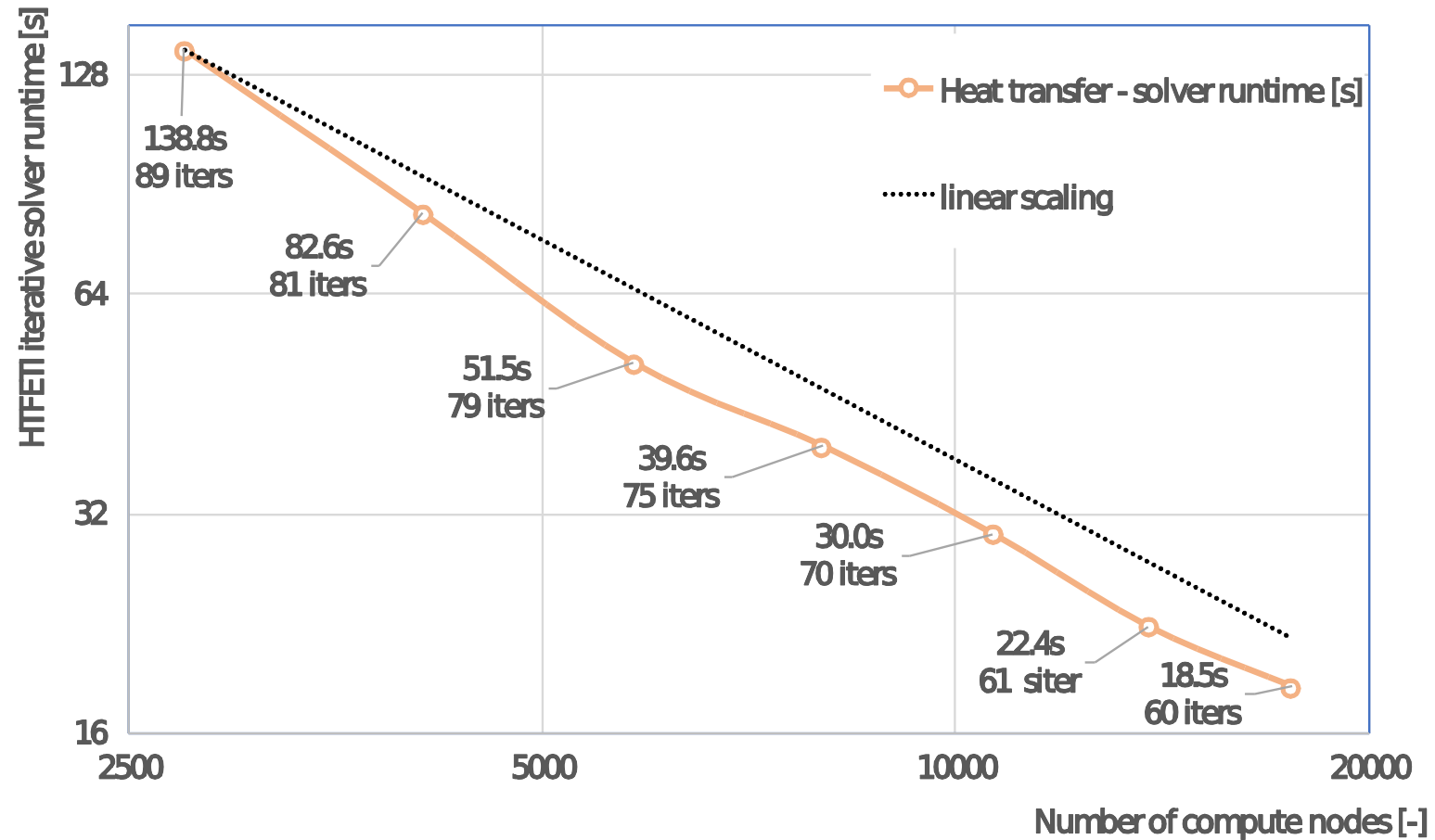
Up to 223 billion DOF on 17576 compute nodes (281 216 cores)

Heat transfer (Laplace equation)



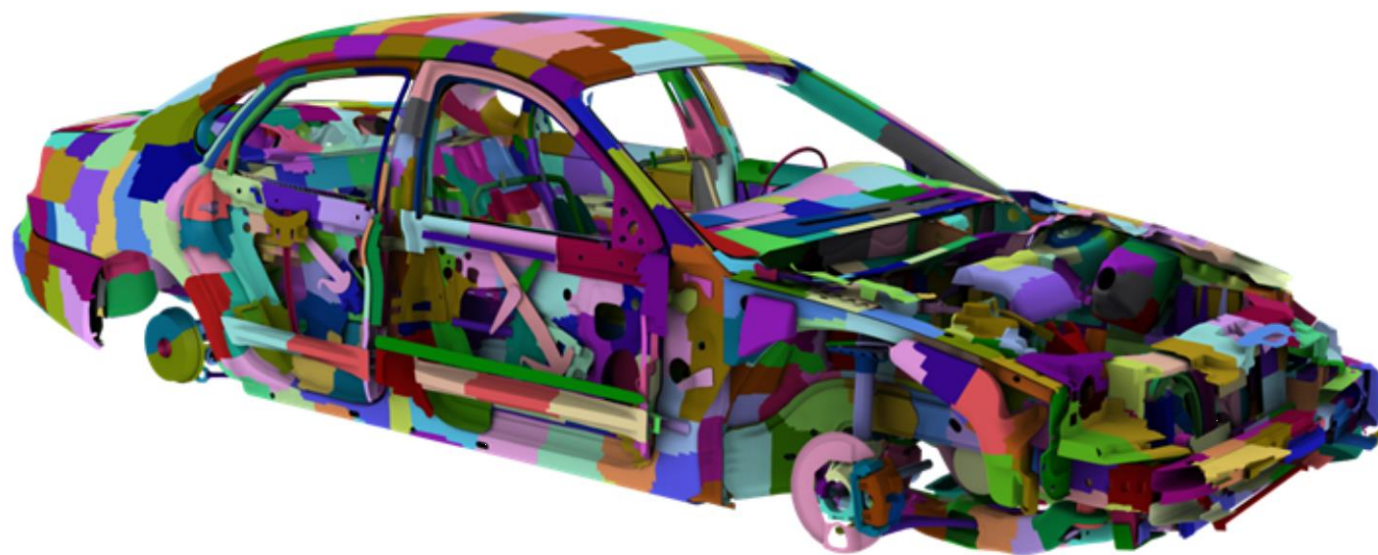
Strong Scalability Test

Heat transfer 20 billion DOF on up to 17 576 Compute Nodes (281 216 cores)



Autoři T. Brzobohatý, L. Říha, Markopoulos, ... NSC IT4I, software ESPRESSO

Automatické rozložení oblastí



Autor T. Brzobohatý, NSC Ostrava

Závěrečné poznámky

- První potenciálně paralelní algoritmus navrhl Schwarz v r. 1869
- První algoritmus s lineární složitostí (multigrid) publikoval Fedorenko v r. 1964, význam nedocenil
- Nezávisle byla rozpracována varianta multigridu Janasem a Weissem z VVUÚ Radvanice kolem r. 1975, aplikace v hornictví
- FETI navrhl C. Farhat, publikace 1991, analýza Mandel 1994
- TFETI (KAM) pochází z r. 2005
- Výzkum metod rozložení oblasti na VŠB, zejména TFETI a adaptace na kontaktní úlohy mechaniky, byl důležitý pro vznik NSC-IT4I
- Přednáška je založena na článku, který vyjde v PMFA