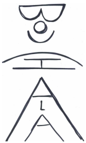
Nerovnosti mezi průměry

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky

10. 4. 2015, MODAM

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHA A

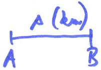
Určete průměrnou rychlost auta, které jelo první hodinu rychlostí 40 km/h a druhou hodinu rychlostí 60 km/h.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{40+60}{2} = \underline{\underline{50}}\ (\text{km/h})$$

$$a, b \in \mathbb{R}: \quad \frac{a+b}{2} \ \dots \ \text{aritmetický průměr}$$

ÚLOHA B

Určete průměrnou rychlost auta, které jelo z místa A do místa B rychlostí 40 km/h a zpět z B do A rychlostí 60 km/h.

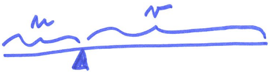


$$v = \frac{2s}{t} = \frac{2\cancel{s}}{\frac{\cancel{s}}{40} + \frac{\cancel{s}}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \underline{\underline{48}}\ (\text{km/h})$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$: $\quad \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ ... <u>harmonický průměr</u>

Úloha C

Vážíme maso na nerovnoramenné váze. Dáme-li ho na levou misku, vyvážíme ho 4 kg, dáme-li ho napravo, vyvážíme ho 9 kg. Jaká je hmotnost masa?



$$\left.\begin{aligned} m \cdot u &= 4 \cdot v \\ m \cdot v &= 9 \cdot u \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^2 \cdot \cancel{u} \cdot \cancel{v} = 4 \cdot 9 \cdot \cancel{u} \cdot \cancel{v}$$

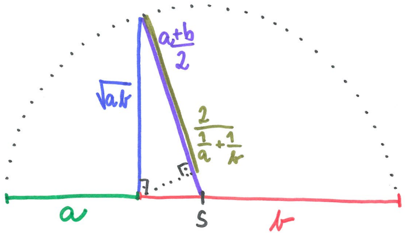
$$m = ?$$

$$m = \sqrt{4 \cdot 9}$$

$$m = \underline{\underline{6}} \text{ (kg)}$$

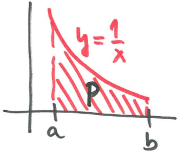
$a, b \in \mathbb{R}$
$a, b \geq 0$: $\sqrt{a \cdot b}$ ... geometrický průměr

POZOROVÁNÍ 1

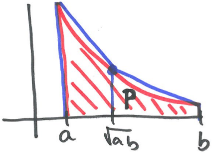


$$\boxed{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{a \cdot b} \leqslant \frac{a+b}{2}}$$

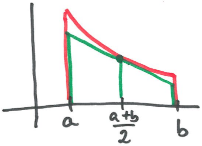
POZOROVÁNÍ 2



$$P=\int_a^b \frac{1}{x}\,dx=\ln b-\ln a$$



$$P=\ln b-\ln a<\frac{1}{2}\frac{b-a}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{2}\frac{b-a}{\sqrt{ab}}=\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

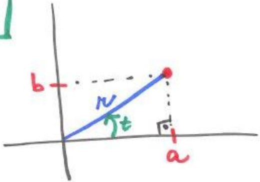


$$P=\ln b-\ln a>\frac{2\cdot(b-a)}{a+b}$$

$$\boxed{\sqrt{a\cdot b}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}}$$

POZOROVÁNÍ 3

$\boxed{a, b > 0}$



$a = r \cdot \cos t, \quad \boxed{r > 0}$

$b = r \cdot \sin t, \quad \boxed{t \in (0, \frac{\pi}{2})}$

$$\boxed{\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{r\cos t \cdot r\sin t} \le \frac{r\cos t + r\sin t}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2 \sin t \cos t \le 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\sin(2t) \le 1}$$

(Rovnost nastane právě tehdy, je-li $t = \frac{\pi}{4}$, tzn. $a=b$)

Věta. (AG nerovnost)

Pro každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots x_n$ platí

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

přičemž (v každé z nerovností) rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

- $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ ... harmonický průměr,
- $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ ... geometrický průměr,
- $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ... aritmetický průměr.

Důkaz AG nerovnosti (A.L.Cauchy, 1820)

- Tvrzení zřejmě platí pro $n = 2$, protože

$$\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow 4x_1x_2 \le x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \le (x_1 - x_2)^2.$$

- Ukažme, že platí-li tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, platí i pro $2n$, tj. ukažme

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 : \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall y_1, y_2, \ldots, y_{2n} > 0 : \quad \sqrt[2n]{y_1 y_2 \cdots y_{2n}} \le \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n}}{2n}.$$

$$\sqrt[2n]{y_1 y_2 \cdots y_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \cdot \sqrt[n]{y_{n+1} y_{n+2} \cdots y_{2n}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \cdot \frac{y_{n+1} + y_{n+2} + \cdots + y_{2n}}{n}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} + \frac{y_{n+1}+y_{n+2}+\cdots+y_{2n}}{n}}{2} =$$

$$= \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n}}{2n}.$$

Takže už máme dokázáno, že AG nerovnost platí pro každou n-tici kladných čísel, kde

$$n \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}.$$

- Uvědomme si, že k dokončení důkazu stačí dokázat, že platí-li tvrzení pro $n+1 \in \mathbb{N}$, platí i pro n, tzn.

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0: \quad \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_{n+1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall y_1, y_2, \dots, y_n > 0: \quad \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Buď $y_1, y_2, \dots, y_n > 0$ dáno. Volme

$$x_1 := y_1, \ x_2 := y_2, \ \dots, x_n := y_n, \ x_{n+1} := \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Pak

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_{n+1}} \leq \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}}{n+1} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_{n+1}} \;\le\; \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}}{n+1} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Odtud

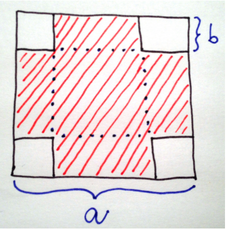
$$y_1 y_2 \cdots y_n \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \;\le\; \left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)^{n+1},$$

a proto

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \;\le\; \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

$\blacksquare$

Vánoční problém. Z kartónu tvaru čtverce o straně a (cm) chceme vystřihnout čtyři čtverce o straně b (cm) umístěné v rozích tak, aby krabice (bez víka) složená ze zbytku kartónu měla maximální objem. Jak velké b máme zvolit?



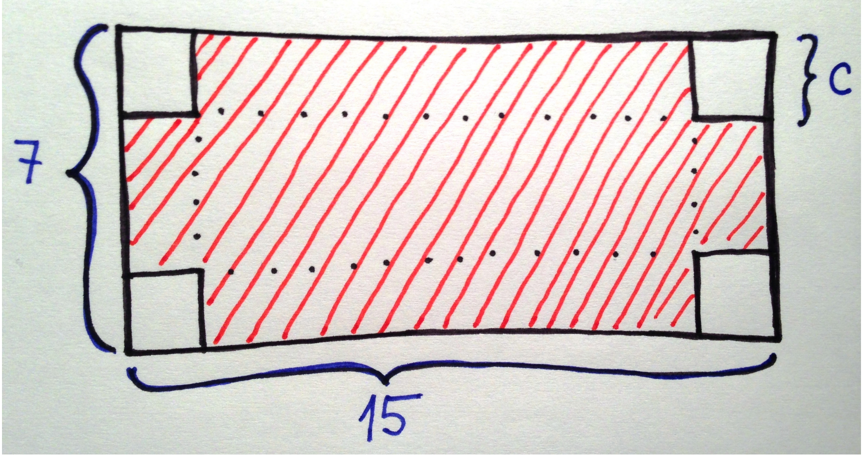
Máme vlastně zjistit, pro jaká $b \in (0, \frac{a}{2})$ je $V(b) := (a-2b)^2 b$ největší.

$$\forall b \in \left(0, \frac{a}{2}\right) : \; V(b) = \frac{1}{4}(a-2b)^2(4b) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a-2b+a-2b+4b}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^3,$$

přičemž rovnost nastane při $a-2b=4b$, tj. pro $b=\frac{a}{6}$.

Závěr. Složená krabice bude mít největší objem $\left(\text{a to } \frac{2}{27}a^3 \text{ (cm}^3\text{)}\right)$, odstřihneme-li čtverečky o straně $b = \frac{a}{6}$ (cm).

Domácí úkol 1. Zjistěte (pomocí AG nerovnosti), jak velké čtverečky (o straně c cm) musíte vystřihnout z kartónu tvaru obdélníku o stranách 15 cm a 7 cm, aby krabice složená ze zbytku kartónu měla maximální objem.



Pozorování 4. Uvažujme posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

tzn. že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Dá se dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{e = 2.718281828459045235360287471352 6625\ldots}$$

Domácí úkol 2. Dokažte, že posloupnost

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

je klesající.

$$\boxed{\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots}$$

Domácí úkol 3. Rozhodněte, které z čísel

$$e^{\pi}, \;\; \pi^{e}$$

je větší.

Pozorování 5.

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2},$$

a proto

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Příklad. Ze všech válců s objemem $V > 0$ vyberte ten, který má **nejmenší** povrch. Označme r a v poloměr podstavy a výšku hledaného válce. Protože

$$V = \pi r^2 v, \text{ tzn. } v = \frac{V}{\pi r^2},$$

platí pro povrch válce

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\, v = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$2\pi r^2 = \frac{V}{r},$$

tzn. je-li

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \ v = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

Literatura

A. Kufner
Nerovnosti a odhady
Mladá fronta, Škola mladých matematiků, Praha 1975

Děkuji vám za pozornost!