



# Matematika mezi digitálním foťákem a facebookem

Matyáš „ $\int_0^T M dx$ ” Theuer

Katedra aplikované matematiky, VŠB – TU Ostrava

5. 4. 2016



# Plán přednášky

- Úvod
- Matice obrazu
- Histogramy
- Barvy
- Komprese
- Neostrost
- Konvoluce
- Aplikace





→ Matematika →





→ Matematika →



→

Matematika →





→ Matematika →



→

Matematika →

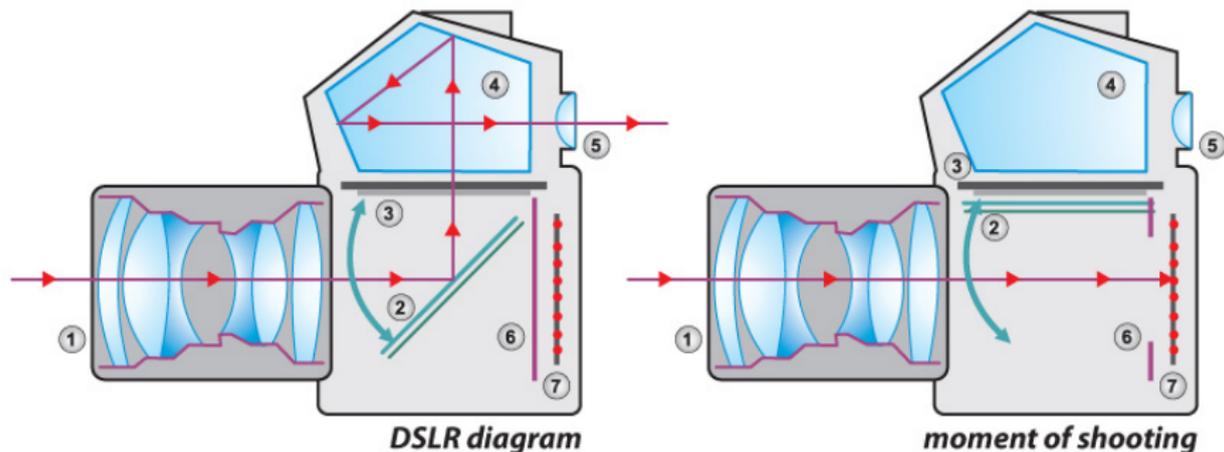


→ Matematika →





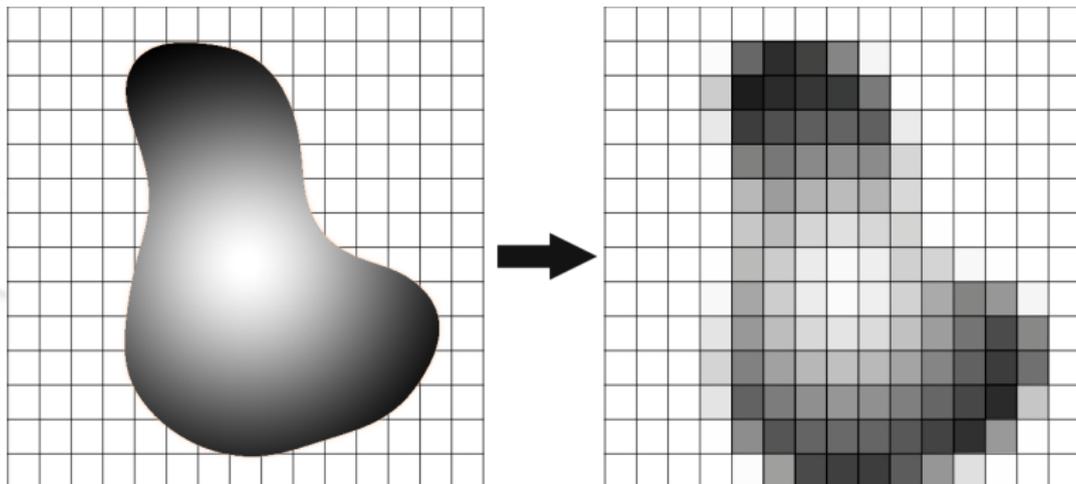
# Zachycení obrazu



- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| 1. Lens                  | 5. Eyepiece            |
| 2. Reflex mirror         | 6. Focal-plane shutter |
| 3. Matte focusing screen | 7. Sensor              |
| 4. Pentaprism            | → light                |



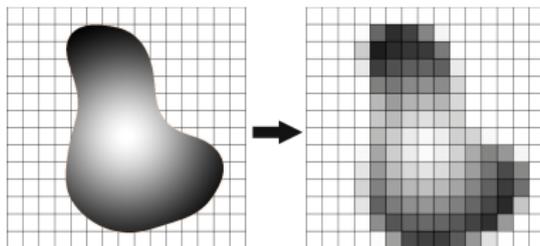
# Digitální obraz



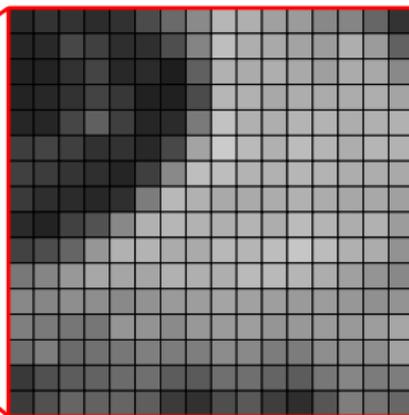
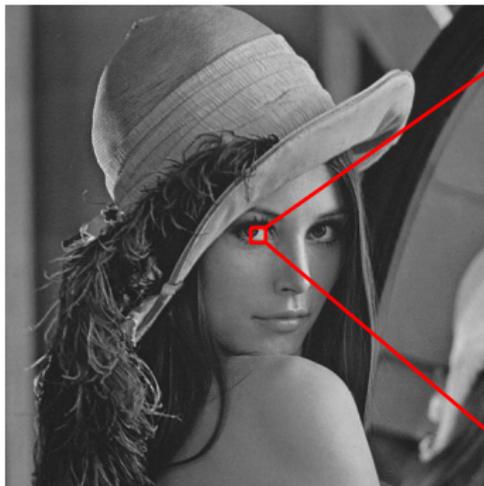
0      50      87      162      209      255



# Matrice obrazu



$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \text{ kde } a_{i,j} \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}.$$



41	51	51	44	49	75	106	139	182	175	160	155	137	134	102	51
38	41	71	64	46	47	78	133	190	174	169	163	156	174	155	97
34	35	50	68	40	43	30	96	177	171	174	169	159	171	168	137
35	39	50	67	55	33	32	75	182	177	168	173	171	172	174	164
38	38	70	96	63	38	43	122	194	176	174	180	179	173	176	177
62	68	63	49	50	40	72	163	203	186	176	188	181	173	181	178
64	60	52	47	37	63	138	190	189	179	177	182	179	173	173	169
58	46	43	39	47	124	184	177	169	170	172	177	172	167	168	160
42	35	65	82	136	177	182	178	175	180	173	187	180	173	177	156
66	77	101	150	177	179	171	170	184	181	189	198	188	176	172	146
120	133	152	167	165	165	177	175	174	186	185	181	173	160	148	136
137	134	142	142	137	146	154	157	164	161	158	154	156	151	145	147
127	122	118	118	149	148	138	152	155	158	149	152	155	153	157	166
111	126	107	113	119	127	124	126	140	137	124	124	143	144	142	162
57	80	92	98	107	111	92	90	111	111	100	92	119	134	123	125
59	81	101	98	101	94	59	49	78	89	62	46	86	126	116	103



## Naše fotka





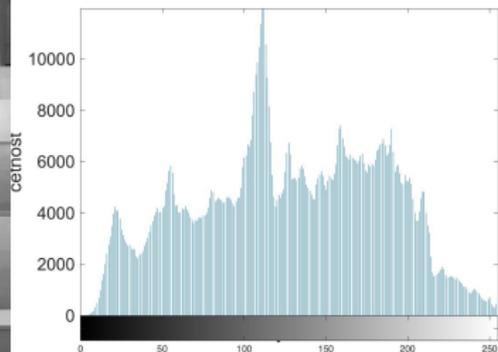
# Histogram





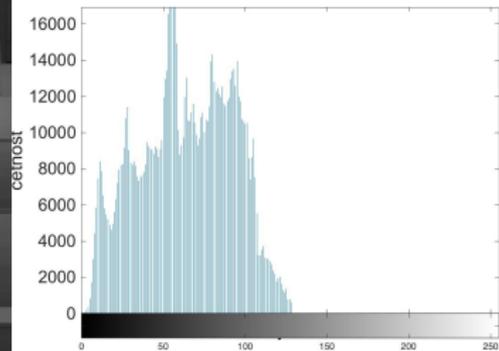
# Histogram

Graf četnosti výskytu jednotlivých hodnot jasu v matici obrazu.



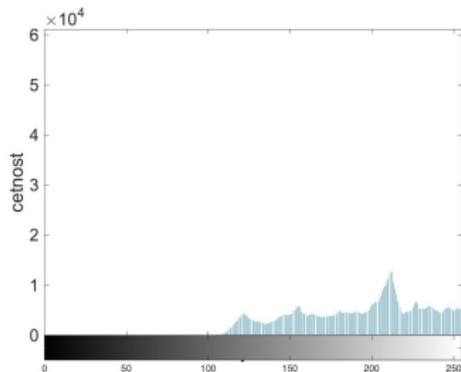


# Ztmavení



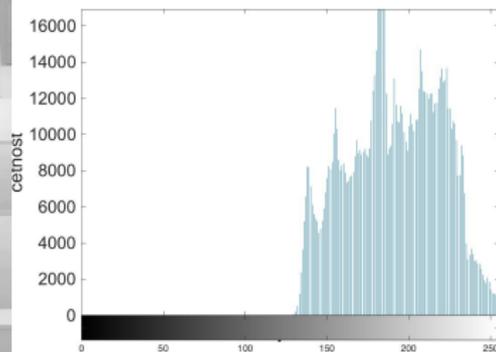


# Zesvětlení I.



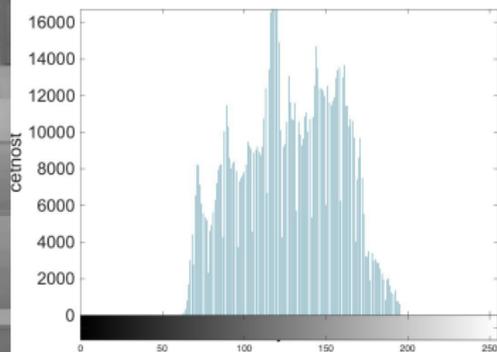


## Zesvětlení II.



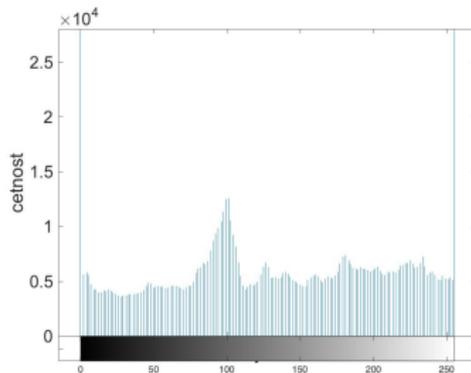


# Snížení kontrastu



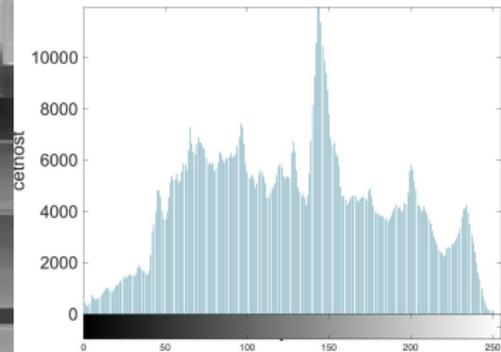


# Zvýšení kontrastu





# Negativ





## Prahování

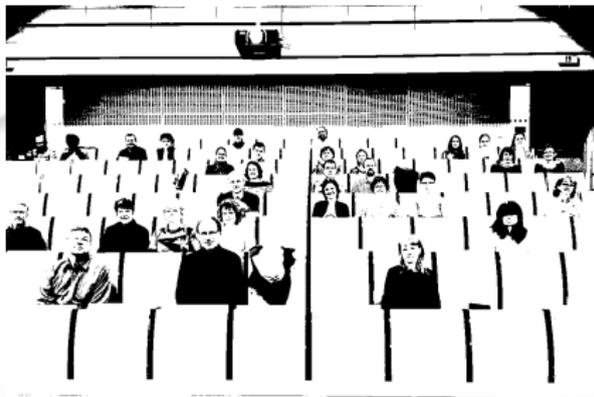
Pixely, které mají menší hodnotu jasu než práh  $t$  jsou nastaveny na 0.  
Ostatní jsou nastaveny na 255.





## Prahování

Pixely, které mají menší hodnotu jasu než práh  $t$  jsou nastaveny na 0.  
Ostatní jsou nastaveny na 255.

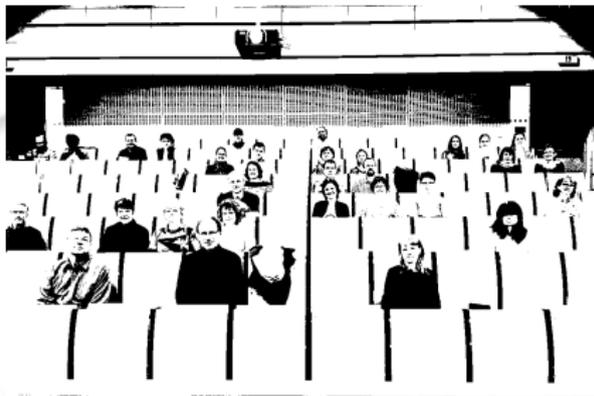


$$t = 80$$



## Prahování

Pixely, které mají menší hodnotu jasu než práh  $t$  jsou nastaveny na 0. Ostatní jsou nastaveny na 255.



$t = 80$



$t = 150$



## Barevný obraz

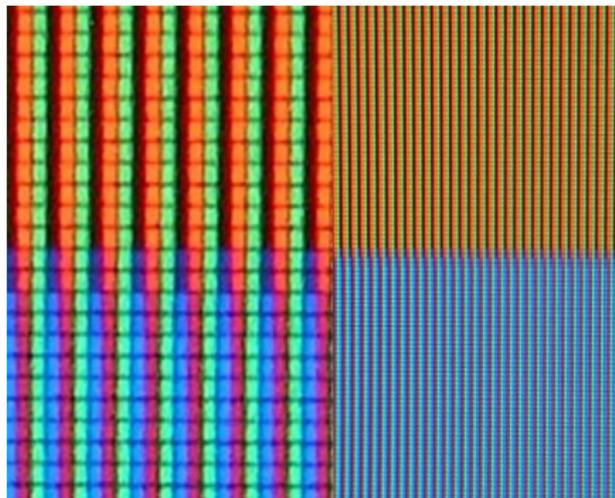
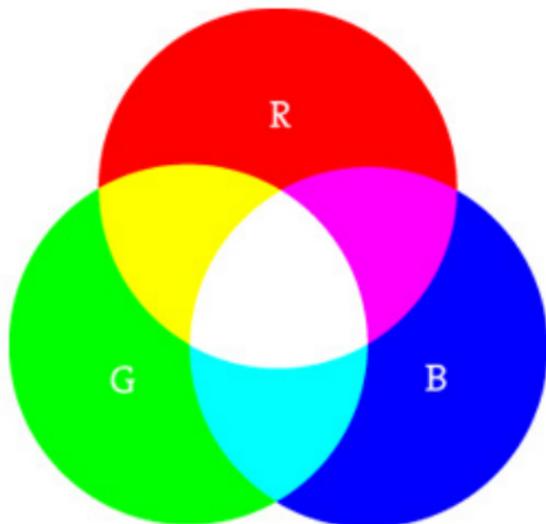
Skládá se ze tří barevných složek R, G a B.





## Barevný obraz

Skládá se ze tří barevných složek R, G a B.





## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.





## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.





## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.





## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.





## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.





## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.

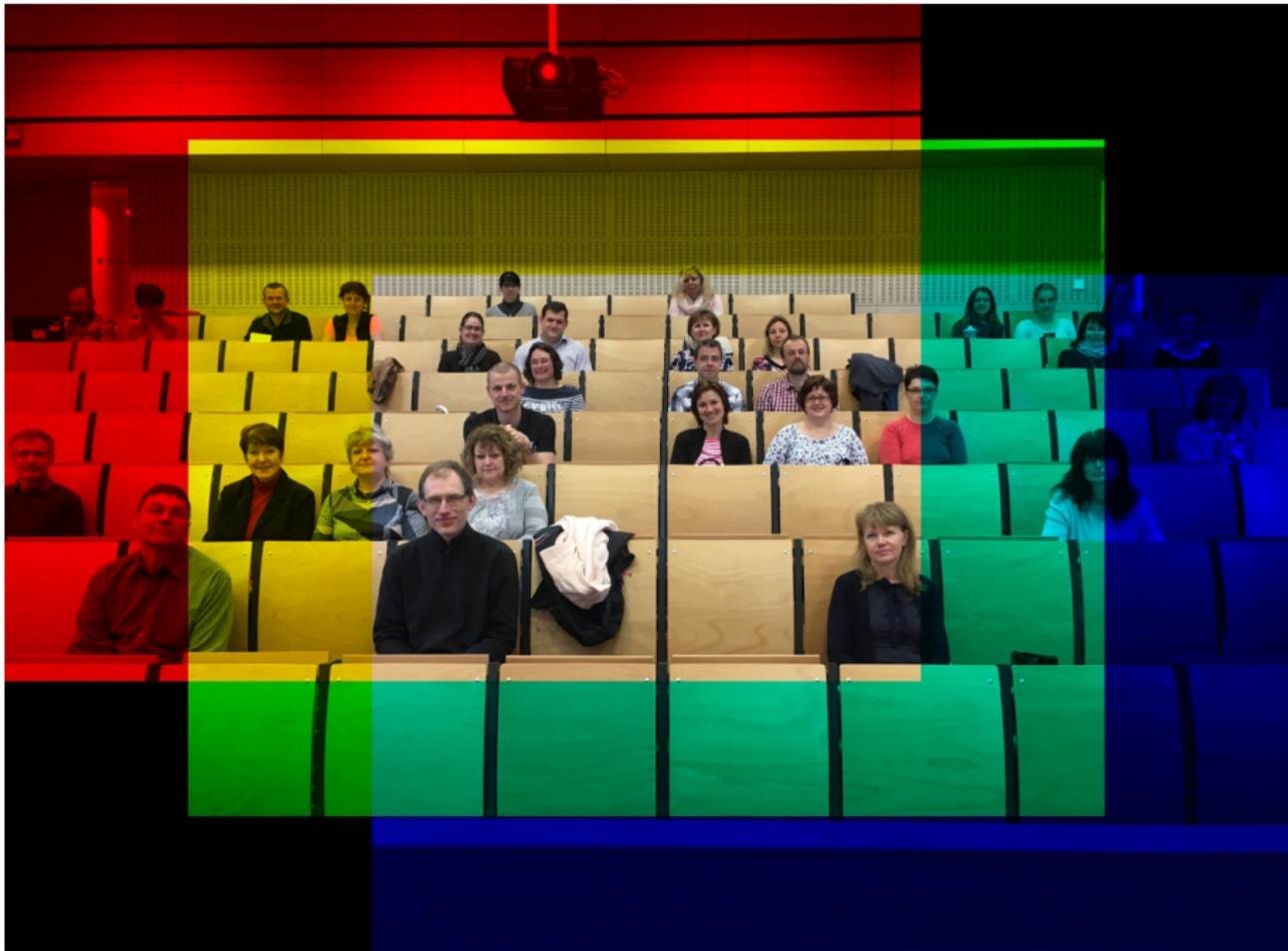




## Barevný obraz

Každý barevný obraz obsahuje tři obrazové matice s hodnotami jasu pro jednotlivé barevné složky.









## Jak obraz uložit?

- Číslo od 0 do 255 uložíme do 8 bitů.



## Jak obraz uložit?

- Číslo od 0 do 255 uložíme do 8 bitů.
- Když je obraz barevný, uložíme tři matice R G B.



## Jak obraz uložit?

- Číslo od 0 do 255 uložíme do 8 bitů.
- Když je obraz barevný, uložíme tři matice R G B.
- Na jeden pixel potřebujeme  $3 \times 8$  bitů  $\rightarrow 3B$ .



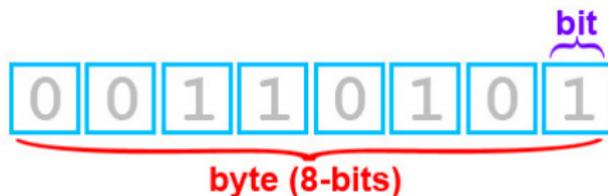
## Jak obraz uložit?

- Číslo od 0 do 255 uložíme do 8 bitů.
- Když je obraz barevný, uložíme tři matice R G B.
- Na jeden pixel potřebujeme  $3 \times 8$  bitů  $\rightarrow 3B$ .
- Na malý obrázek  $800 \times 600$  pixelů je potřeba 1,4MB.



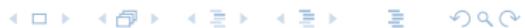
## Jak obraz uložit?

- Číslo od 0 do 255 uložíme do 8 bitů.
- Když je obraz barevný, uložíme tři matice R G B.
- Na jeden pixel potřebujeme  $3 \times 8$  bitů  $\rightarrow 3B$ .
- Na malý obrázek  $800 \times 600$  pixelů je potřeba 1,4MB.
- V praxi není problém uložit takový obrázek do 100kB.





JPEG:100, size:1205.3 kB





JPEG:75, size:204.68 kB



JPEG:50, size:127.18 kB



JPEG:25, size:77.48 kB



JPEG:10, size:44.93 kB



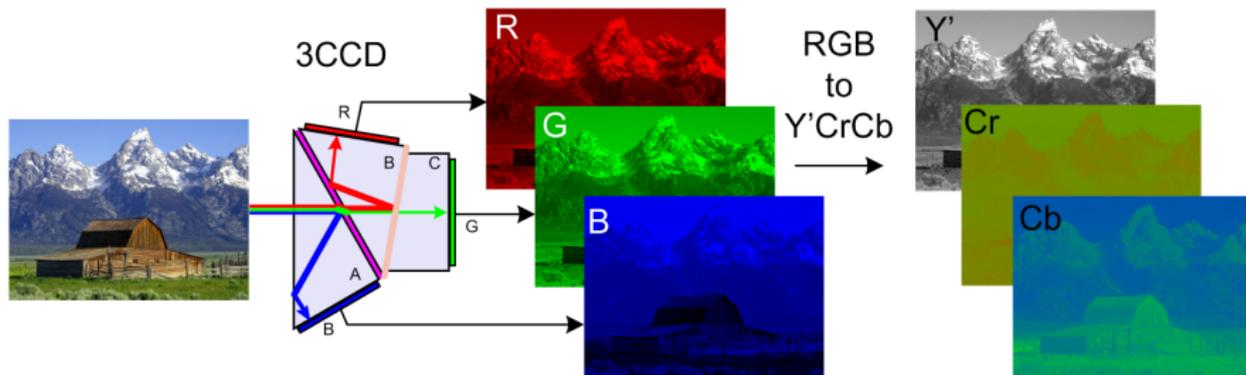
JPEG:5, size:32.15 kB



JPEG:1, size:25.75 kB



# JPEG komprese



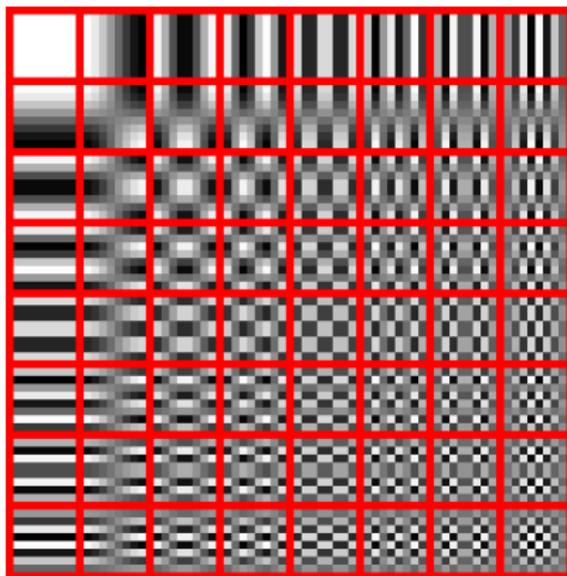


# JPEG komprese





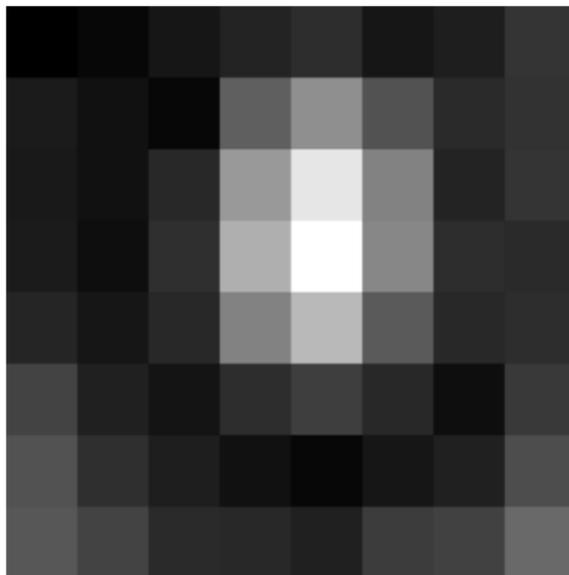
# JPEG komprese





## JPEG komprese - příklad

Originální obraz





## JPEG komprese

Matice obrazu

52	55	61	66	70	61	64	73
63	59	55	90	109	85	69	72
62	59	68	113	144	104	66	73
63	58	71	122	154	106	70	69
67	61	68	104	126	88	68	70
79	65	60	70	77	68	58	75
85	71	64	59	55	61	65	83
87	79	69	68	65	76	78	94



## JPEG komprese

Odečte se 128:

$$\begin{bmatrix} -76 & -73 & -67 & -62 & -58 & -67 & -64 & -55 \\ -65 & -69 & -73 & -38 & -19 & -43 & -59 & -56 \\ -66 & -69 & -60 & -15 & 16 & -24 & -62 & -55 \\ -65 & -70 & -57 & -6 & 26 & -22 & -58 & -59 \\ -61 & -67 & -60 & -24 & -2 & -40 & -60 & -58 \\ -49 & -63 & -68 & -58 & -51 & -60 & -70 & -53 \\ -43 & -57 & -64 & -69 & -73 & -67 & -63 & -45 \\ -41 & -49 & -59 & -60 & -63 & -52 & -50 & -34 \end{bmatrix}$$



## JPEG komprese

Provede se diskrétní cosinová transformace

$$G_{u,v} = \frac{1}{4} \alpha(u) \alpha(v) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 g_{x,y} \cos \left[ \frac{(2x+1)u\pi}{16} \right] \cos \left[ \frac{(2y+1)v\pi}{16} \right]$$

-415.38	-30.19	-61.20	27.24	56.12	-20.10	-2.39	0.46
4.47	-21.86	-60.76	10.25	13.15	-7.09	-8.54	4.88
-46.83	7.37	77.13	-24.56	-28.91	9.93	5.42	-5.65
-48.53	12.07	34.10	-14.76	-10.24	6.30	1.83	1.95
12.12	-6.55	-13.20	-3.95	-1.87	1.75	-2.79	3.14
-7.73	2.91	2.38	-5.94	-2.38	0.94	4.30	1.85
-1.03	0.18	0.42	-2.42	-0.88	-3.02	4.12	-0.66
-0.17	0.14	-1.07	-4.19	-1.17	-0.10	0.50	1.68



## JPEG komprese

Provede se kvantizace (každý prvek se vydělí určitým číslem z kvantizační tabulky, která je vždy stejná)

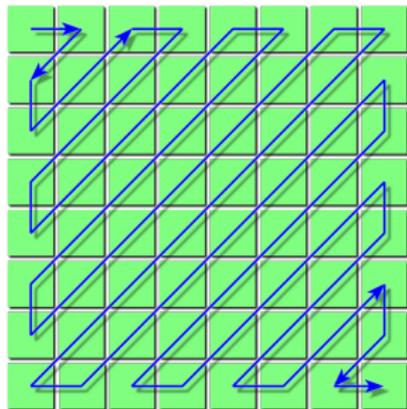
$$\begin{bmatrix} -26 & -3 & -6 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## JPEG komprese - příklad

Uloží se jen několik počátečních hodnot podle schématu:

$$\begin{bmatrix} -26 & -3 & -6 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

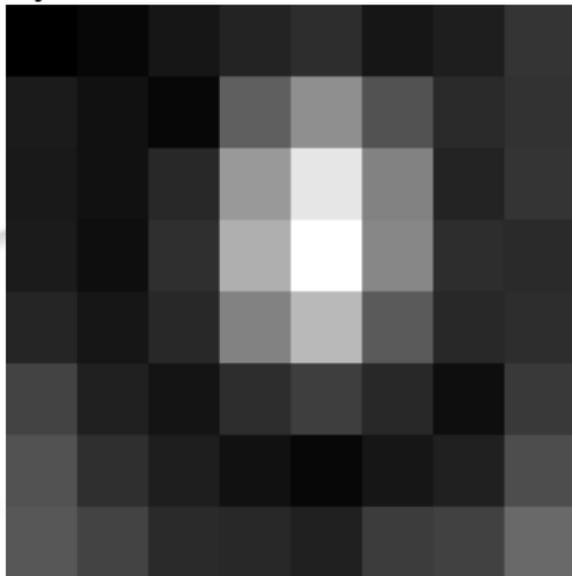


$$I = [-26, -3, 0, -6, -2, -3, \dots, -1, -1]$$

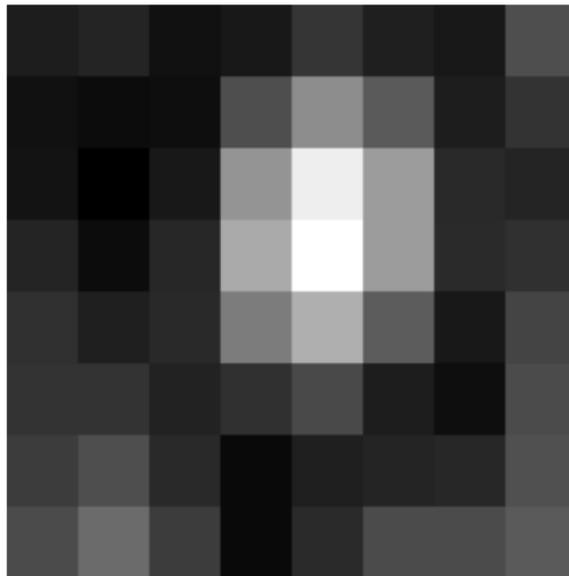


# JPEG komprese

Výsledek:



originál



rekonstrukce z 25 čísel



# Odstraňování neostrosti





## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje



## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje
- Záznamové zařízení se pohybuje



## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje
- Záznamové zařízení se pohybuje
- Signál se nešíří ideálním prostředím



## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje
- Záznamové zařízení se pohybuje
- Signál se nešíří ideálním prostředím
- Nemáme dokonalou optiku



## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje
- Záznamové zařízení se pohybuje
- Signál se nešíří ideálním prostředím
- Nemáme dokonalou optiku

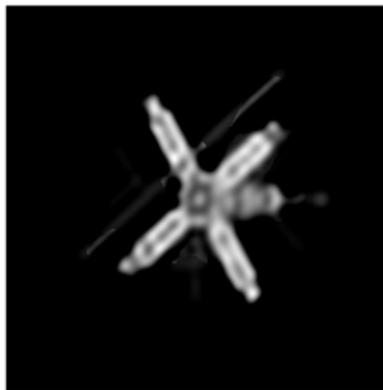




## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje
- Záznamové zařízení se pohybuje
- Signál se nešíří ideálním prostředím
- Nemáme dokonalou optiku

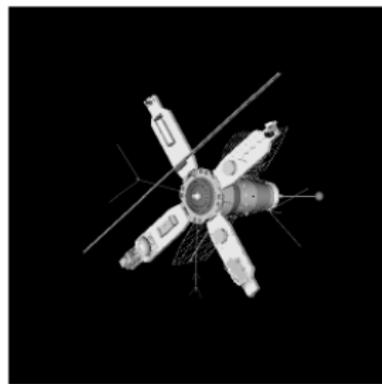




## Odstraňování neostrosti

K rozmazání (vzniku neostrosti) může dojít několika způsoby:

- Snímaný objekt se pohybuje
- Záznamové zařízení se pohybuje
- Signál se nešíří ideálním prostředím
- Nemáme dokonalou optiku





## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $x$ .



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
- Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
- Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .
- Proces rozostření modelujeme jako násobení maticí  $A$ .



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
- Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .
- Proces rozostření modelujeme jako násobení maticí  $A$ .
- Řešíme tedy rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Jedná se o tzv. inverzní problém.



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
  - Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .
  - Proces rozostření modelujeme jako násobení maticí  $A$ .
  - Řešíme tedy rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Jedná se o tzv. inverzní problém.
- 
- Pro obrázek o velikosti  $256 \times 256$  pixelů má matice  $A$   $4,29 \cdot 10^9$  prvků.



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
  - Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .
  - Proces rozostření modelujeme jako násobení maticí  $A$ .
  - Řešíme tedy rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Jedná se o tzv. inverzní problém.
- 
- Pro obrázek o velikosti  $256 \times 256$  pixelů má matice  $A$   $4,29 \cdot 10^9$  prvků.
  - K relativně přesnému počítání je potřeba ukládat čísla v 8 B, což znamená přes 30 GB místa jen k uložení takové matice.



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
  - Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .
  - Proces rozostření modelujeme jako násobení maticí  $A$ .
  - Řešíme tedy rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Jedná se o tzv. inverzní problém.
- 
- Pro obrázek o velikosti  $256 \times 256$  pixelů má matice  $A$   $4,29 \cdot 10^9$  prvků.
  - K relativně přesnému počítání je potřeba ukládat čísla v 8 B, což znamená přes 30 GB místa jen k uložení takové matice.
  - Pro obrázek o velikosti  $3000 \times 2000$  pixelů by bylo potřeba přes 2 PB.



## Matematický model rozostření

- Předpokládáme existenci přesného obrazu  $\mathbf{x}$ .
  - Vlivem různých podmínek dochází k rozostření a vzniku neostrého obrazu  $\mathbf{b}$ .
  - Proces rozostření modelujeme jako násobení maticí  $A$ .
  - Řešíme tedy rovnici  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Jedná se o tzv. inverzní problém.
- 
- Pro obrázek o velikosti  $256 \times 256$  pixelů má matice  $A$   $4,29 \cdot 10^9$  prvků.
  - K relativně přesnému počítání je potřeba ukládat čísla v 8 B, což znamená přes 30 GB místa jen k uložení takové matice.
  - Pro obrázek o velikosti  $3000 \times 2000$  pixelů by bylo potřeba přes 2 PB.
  - Soustava je velmi **špatně podmíněná**.



## Špatně podmíněná soustava

Uvažujme soustavu rovnic:

$$x_1 + y_1 = 1$$

$$x_1 + 1,01y_1 = 2$$





## Špatně podmíněná soustava

Uvažujme soustavu rovnic:

$$x_1 + y_1 = 1$$

$$x_1 + 1,01y_1 = 2$$

Není těžké najít řešení  $x_1 = -99$  a  $y_1 = 100$ .



## Špatně podmíněná soustava

Uvažujme soustavu rovnic:

$$x_1 + y_1 = 1$$

$$x_1 + 1,01y_1 = 2$$

Není těžké najít řešení  $x_1 = -99$  a  $y_1 = 100$ . Co kdybychom zadání nepatrně změnili:



## Špatně podmíněná soustava

Uvažujme soustavu rovnic:

$$x_1 + y_1 = 1$$

$$x_1 + 1,01y_1 = 2$$

Není těžké najít řešení  $x_1 = -99$  a  $y_1 = 100$ . Co kdybychom zadání nepatrně změnili:

$$x_2 + y_2 = 1$$

$$x_2 + 0,99y_2 = 2$$



## Špatně podmíněná soustava

Uvažujme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + y_1 &= 1 \\x_1 + 1,01y_1 &= 2\end{aligned}$$

Není těžké najít řešení  $x_1 = -99$  a  $y_1 = 100$ . Co kdybychom zadání nepatrně změnili:

$$\begin{aligned}x_2 + y_2 &= 1 \\x_2 + 0,99y_2 &= 2\end{aligned}$$

Opět není problém soustavu vyřešit, výsledky se však podstatně liší:  
 $x_2 = 101$  a  $y_2 = -100$ .



## Praktické použití - CSI





## Praktické použití - CSI



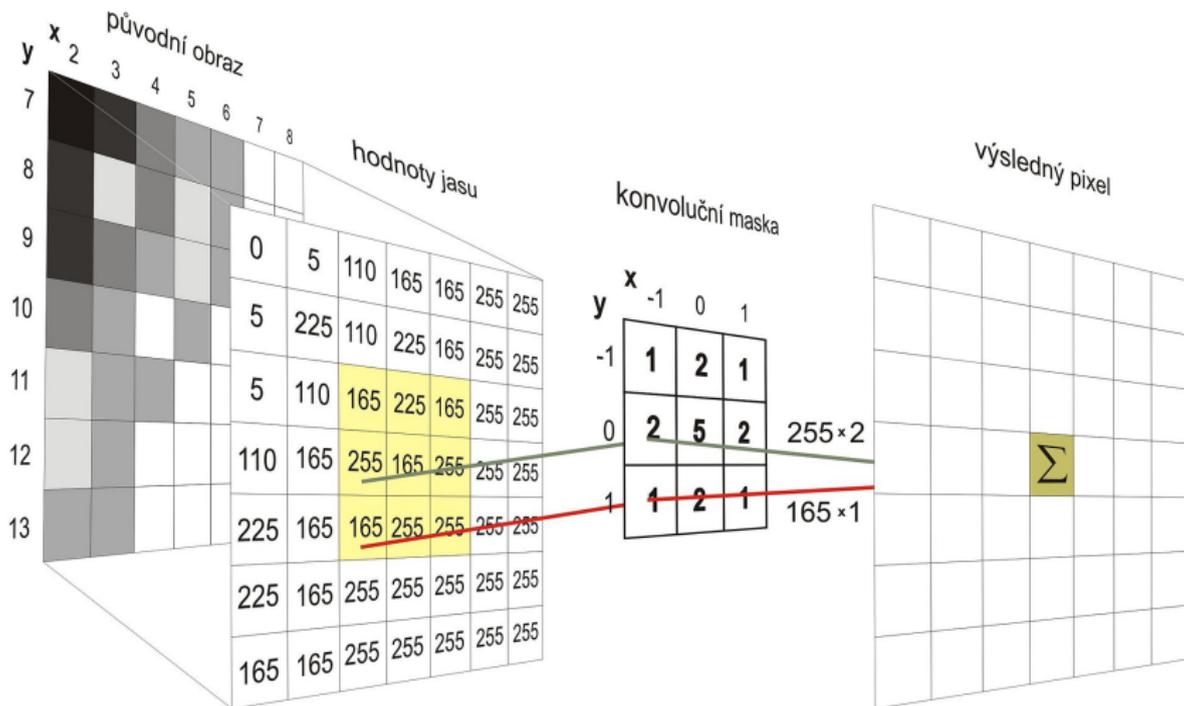


# Konvoluce





# Konvoluce





## Konvoluce - rozostření



$$\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



## Konvoluce - zvýraznění hran



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



# Konvoluce - šum





## Konvoluce - redukce šumu



$$\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



## Konvoluce - redukce šumu



$$\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^a \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Konvoluce - pouze hrany



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Konvoluce - svislé hrany



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Konvoluce - vodorovné hrany



$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

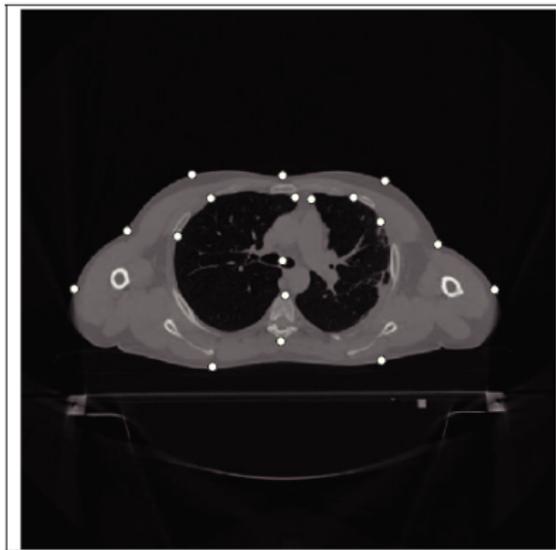


# Registrace obrazu v biomedicíně

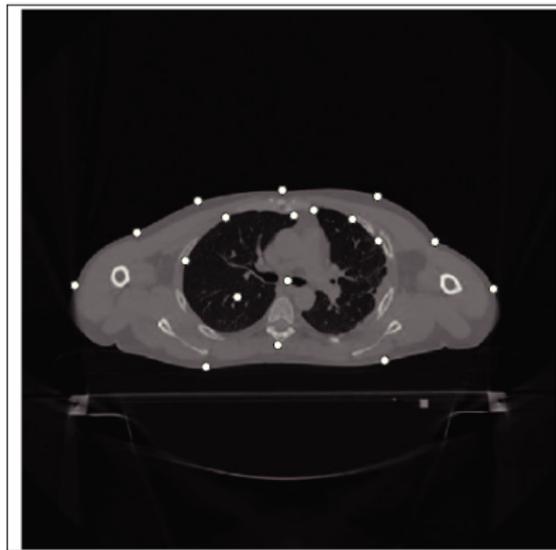




## Registrace obrazu v biomedicíně

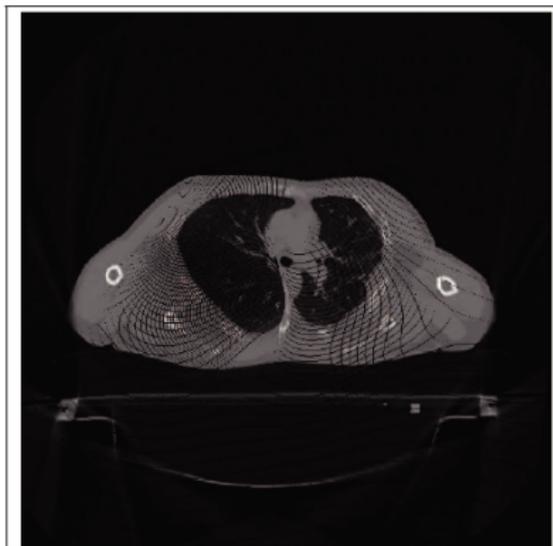


(a) Obraz  $R$ .

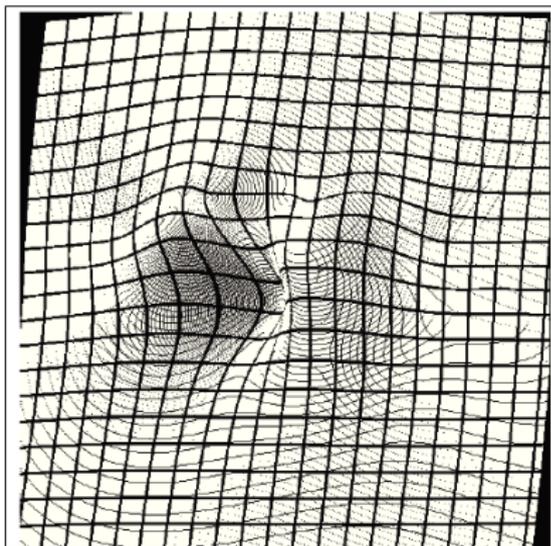


(b) Obraz  $T$ .

## Registrace obrazu v biomedicíně



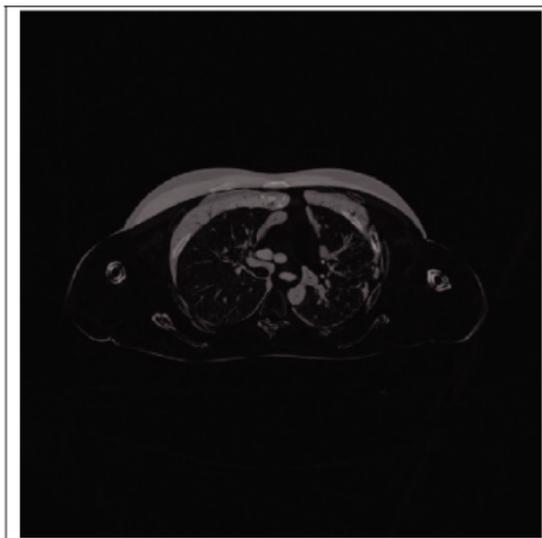
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



## Registrace obrazu v biomedicíně



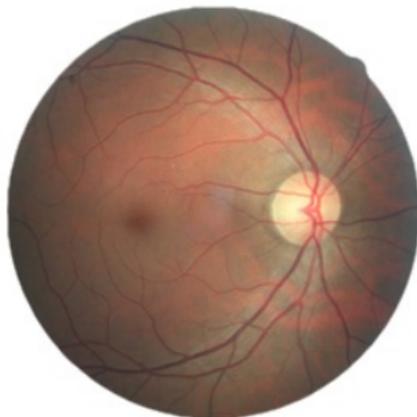
(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .



## Registrace obrazu v biomedicíně - Kaggle



<https://www.kaggle.com/c/diabetic-retinopathy-detection>  
Second Annual Data Science Bowl



## Zdroje obrázků:

<http://myphotographylesson.com/dslr-%E2%80%93-93-principle-scheme-of-work/>

<http://www.kenrockwell.com/nikon/d800.htm>

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Facebook\\_like\\_thumb.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Facebook_like_thumb.png)

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AFacebook.svg>

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konvoluce\\_2rozm\\_diskretni.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konvoluce_2rozm_diskretni.jpg)

<http://kaggle.com>

[http://en.wikipedia.org/wiki/RGB\\_color\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/RGB_color_model)

Obrázky registrace: Ing. Alena Vašatová





matyas.theuer@gmail.com



matyas.theuer@gmail.com

**Děkuji za pozornost**