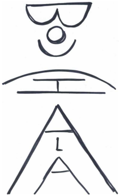
Chvalme kolmost

Jiří Bouchala



Katedra
aplikované
matematiky

7. 4. 2017, MODAM

Symbolem $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, značíme množinu všech uspořádaných n–tic reálných čísel. Prvky $\mathbb{R}^n$ zapisujeme ve tvaru

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \ \ y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \ \dots \ .$$

Definujme nyní v $\mathbb{R}^n$ následující operace ($x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x + y &:= \ (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha x &:= \ (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

(není těžké prokázat, že spolu s těmito operacemi tvoří $\mathbb{R}^n$ vektorový prostor);

$$(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \quad \text{... \underline{skalární součin}},$$

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{... \underline{norma}},$$

$$\Big(\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

$$\text{... vzdálenost vektorů } x \text{ a } y \Big).$$

Pokud

$$(x, y) = 0,$$

říkáme, že vektory x a y jsou na sebe kolmé (ortogonální).

Příklad 1

Buďte

$$x = (1, 8) \in \mathbb{R}^2, \;\; p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; y = 5x\}.$$

Najděte $Px \in p$ tak, aby

$$\|x - Px\| = \min_{y \in p} \|x - y\|,$$

a určete $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, p)$.

Zvolme

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} (1, 5)$$

(e_1 je směrovým vektorem přímky p a platí $\|e_1\| = 1$).

Pak

$$p = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

a protože pro každé $y = \alpha e_1 \in p$ platí

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x - \alpha e_1, x - \alpha e_1) = \\ = (x, x) - 2\alpha\,(x, e_1) + \alpha^2 \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} \pm (x, e_1)^2 = \end{aligned}$$

$$= (x, x) - (x, e_1)^2 + \big(\alpha - (x, e_1)\big)^2 \ \text{... nejmenší pro } \alpha = (x, e_1),$$

je

- $Px = (x, e_1)e_1, \ \|Px\| = \sqrt{(x, e_1)^2} = |(x, e_1)|,$
- pro každé $y = \alpha e_1 \in p$
  $$(x - Px, y) = (x - (x, e_1)e_1, \alpha e_1) = \alpha(x, e_1) - \alpha(x, e_1)\underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} = 0,$$
- $\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2$ ... Pythagorova věta.

V našem případě

$$x = (1,8), \ \ e_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(1,5),$$

a proto

$$Px = (x, e_1)e_1 = \frac{41}{\sqrt{26}}\frac{1}{\sqrt{26}}(1,5) = \frac{41}{26}(1,5),$$

$$\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2 = 65 - \left(\frac{41}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{9}{26},$$

což znamená, že

$$\|x - Px\| = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Příklad 2

Buďte

$$x = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3, \ \sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y + z = 0\}.$$

Najděte $Px \in \sigma$ tak, aby

$$\|x - Px\| = \min_{y \in \sigma} \|x - y\|,$$

a určete $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, \sigma)$.

Zvolme

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1), \ e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, -1)$$

(e_1, e_2 jsou směrové vektory roviny σ a platí $\|e_1\| = \|e_2\| = 1, \ (e_1, e_2) = 0$).

Pak

$$\sigma = \{\alpha e_1 + \beta e_2 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

a úplně analogicky jako v předchozím případě lze dokázat, že

- $Px = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2, \ \|Px\|^2 = (x, e_1)^2 + (x, e_2)^2$,
- pro každé $y \in \sigma$ je $(x - Px, y) = 0$,
- $\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2$.

V našem případě

$$x = (1, 2, 3), \ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \ e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$$

a proto

$$Px = -\frac{2}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right),$$

$$\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2 = 14 - (2 + \frac{4}{3}) = \frac{32}{3},$$

což znamená, že

$$\|x - Px\| = 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Symbolem $C([0,1])$ značíme množinu všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$. Definujme nyní v $C([0,1])$ následující operace ($f, g \in C([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} &f+g \in C([0,1]),\ (f+g)(x) := \ f(x)+g(x), \\ &\alpha f \in C([0,1]),\ (\alpha f)(x) := \ \alpha f(x) \end{aligned}$$

(s těmito operacemi tvoří $C([0,1])$ vektorový prostor);

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ \ \text{... \underline{skalární součin}},$$

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x} \ \ \text{... \underline{norma}},$$

$$\left(\|f-g\| = \sqrt{\int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x} \ \ \text{... vzdálenost funkcí } f \text{ a } g\right).$$

Příklad 3

Buďte

$$f(x) := x^3 - 2x^2 + x - 2 \in C([0,1]),\ \ p = \{\alpha x :\ \alpha \in \mathbb{R}\} \subset C([0,1]).$$

Najděte $Pf \in p$ tak, aby

$$\|f - Pf\| = \min_{g \in p} \|f - g\|.$$

Zvolme

$$e_1(x) := \sqrt{3}\, x$$

$$(e_1 \in p \text{ a platí } \|e_1\| = \sqrt{\int_0^1 3x^2\, \mathrm{d}x} = 1).$$

Pak

$$p = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

a platí

- $Pf = (f, e_1)e_1, \ \|Pf\| = \sqrt{(f, e_1)^2} = |(f, e_1)|,$
- pro každé $g = \alpha e_1 \in p$ je $(f - Pf, g) = 0,$
- $\|f - Pf\|^2 = \|f\|^2 - \|Pf\|^2.$

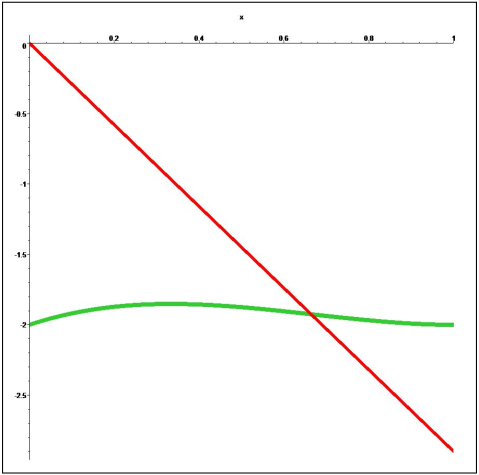
V našem případě

$$f(x) := x^3 - 2x^2 + x - 2, \ \ e_1(x) := \sqrt{3}\,x,$$

a proto

$$Pf(x) := -\frac{29}{10}\,x.$$

$$f(x) := x^3 - 2x^2 + x - 2, \quad Pf(x) := -\frac{29}{10}\,x.$$



Příklad 4

Buďte

$$f(x) := x^2 \sin(3x) \in C([0,1]),\ \sigma = \{a + bx + cx^2 :\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset C([0,1]).$$

Najděte $Pf \in \sigma$ tak, aby

$$\|f - Pf\| = \min_{g \in \sigma} \|f - g\|.$$

Zvolme $e_1(x) := 1,\ e_2(x) := 2\sqrt{3}\,x - \sqrt{3},\ e_3(x) := 6\sqrt{5}\,x^2 - 6\sqrt{5}\,x + \sqrt{5}$
($e_1,\ e_2,\ e_3 \in \sigma$ a platí $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1,\ (e_i, e_j) = 0$ pro $i \neq j$).

Pak

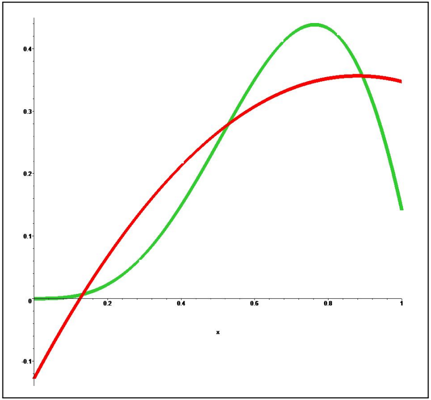
$$\sigma = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 :\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

a platí

$$Pf = (f, e_1)e_1 + (f, e_2)e_2 + (f, e_3)e_3.$$

V našem případě

$$f(x) := x^2 \sin(3x), \quad Pf(x) :\doteq -0,13 + 1,1\,x - 0,63\,x^2.$$



Definujme nyní v $C([0, 2\pi])$ skalární součin

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

a normu

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Pak lze za <u>ortonormální prvky</u>

$$e_1, e_2, e_3, \ \dots \ \in C([0, 2\pi])$$

volit funkce

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(3x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(3x), \ \dots$$

... a lze dokázat, že pro každou funkci $f \in C([0, 2\pi])$ platí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x$$

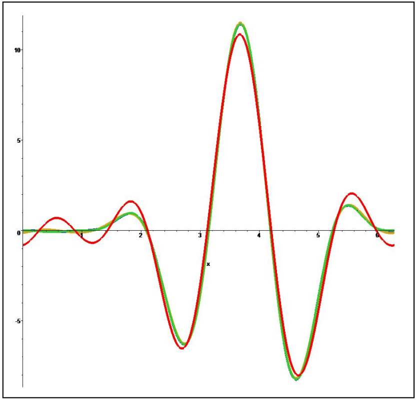
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x.$$

Takže

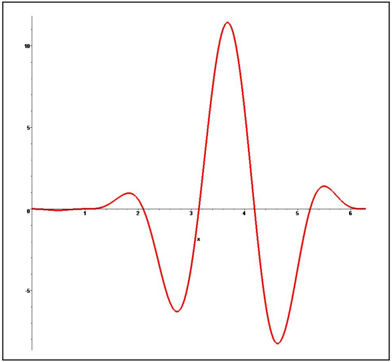
$$f(x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) =: f_N(x).$$

Příklad 5

$$f(x) := \frac{1}{150}x^2(x-2\pi)^3(x-1)^2\sin(3x), \quad f_4(x) := \dots, \quad f_5(x) := \dots$$



$$f(x) := \frac{1}{150}x^2(x-2\pi)^3(x-1)^2\sin(3x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{6}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right).$$



$$f \approx [-0,1; -0,71; -0,1; 1,74; 2,38; 0; -4,43; -1,74; 2,38; 0,68; -0,11; 0,1; -0,03]$$