Katedra
aplikované matematiky

Pravděpodobnost je…

Martina Litschmannová

MODAM 2014

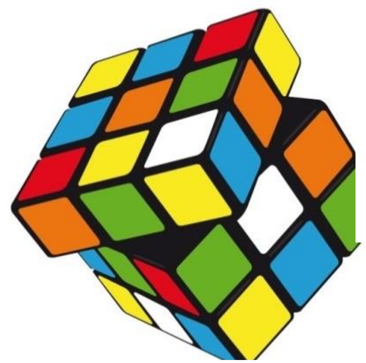
Jak osedlat náhodu?

Řecká mytologie: Bratři Zeus, Poseidon, Hádes hráli v kostky astragalis. Zeus vyhrál nebesa, Poseidon moře a Hádes peklo.

Jak osedlat náhodu?

Jaká je šance, že hodíte-li kostkou, tak padne šestka?







Jak osedlat náhodu?

Jaká je šance, že Wimbledon 2014 vyhraje…?

Rafael Nadal (1)

Tomáš Berdych (6)

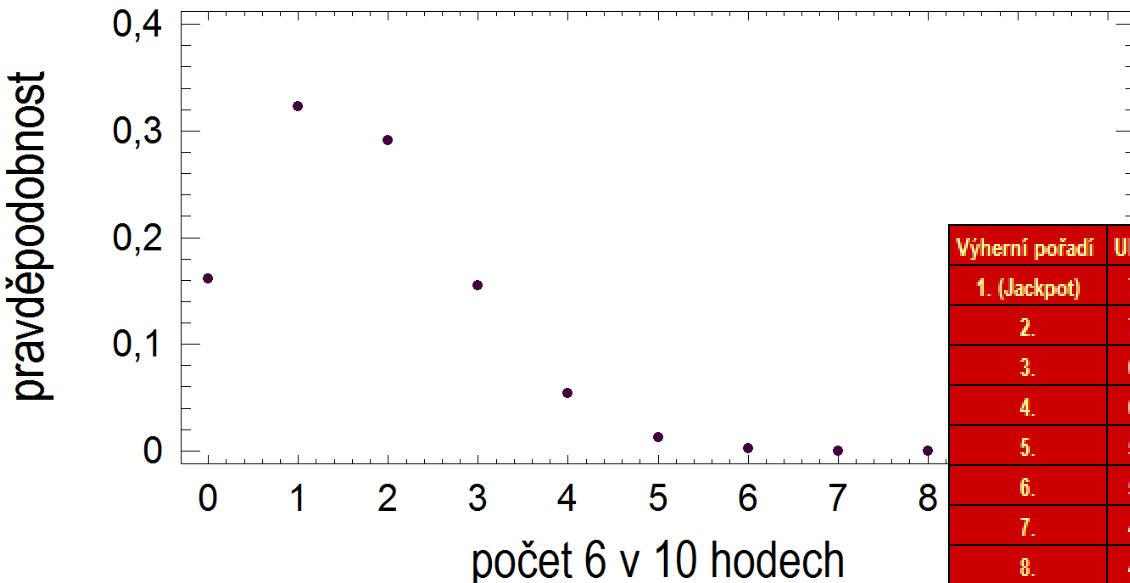
Vincent Millot (200)

Jak osedlat náhodu?

Jaká je šance, že pojišťovna „vydělá“ na cestovním pojištění?

Náhodu nelze ovládnout, ale

šanci na výskyt náhodných jevů lze odhadnout.



Výherní pořadí	Uhodnuto		Pravděpodobnost	1 z ...	Výherní kvóta	Průměrná výhra
1. (Jackpot)	7	+ 1	0,0000000297	33 622 600	18,00%	90 781 020 Kč
2.	7		0,0000001190	8 405 650	4,00%	5 043 390 Kč
3.	6	+ 1	0,0000058294	171 544	4,00%	102 926 Kč
4.	6		0,0000233176	42 886	4,50%	28 948 Kč
5.	5	+ 1	0,0002360912	4 236	4,50%	2 859 Kč
6.	5		0,0009443648	1 059	5,50%	874 Kč
7.	4	+ 1	0,0034102062	293	7,00%	308 Kč
8.	4		0,0136408249	73	13,50%	148 Kč
9.	3	+ 1	0,0213137889	47	14,50%	102 Kč
10.	2	+ 1	0,0613837121	16	24,50%	60 Kč
prohra	ostatní		0,8990417160	1,11	x	0 Kč
Součet			1,0000000000	x	100,00%	x

Čím se zabývá teorie pravděpodobnosti?

Pokus – děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Deterministické pokusy **X** **Náhodné pokusy**

Za určitých počátečních podmínek se dostaví vždy stejný výsledek.

Pro určité počáteční podmínky existuje množina možných výsledků, přičemž jeden z nich nastane.

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

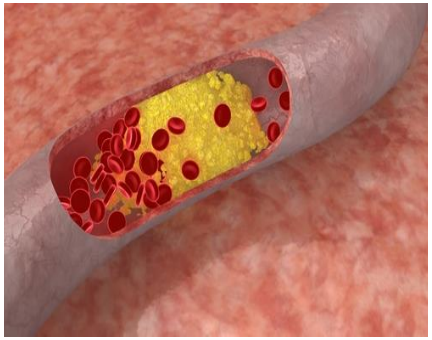
Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Hod kostkou

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

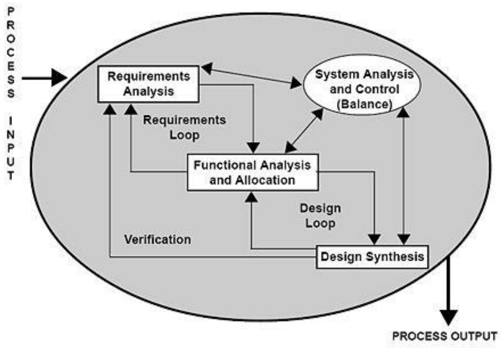
Stanovení množství cholesterolu v krvi



Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Měření počtu požadavků za určité období



Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Hod kostkou

Náhodný jev – tvrzení o výsledku náhodného pokusu. O pravdivosti tohoto tvrzení lze po ukončení pokusu rozhodnout. Značíme velkými písmeny (*A*, *B*, *X*, *Y*, …).

Padne šestka.

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Hod kostkou

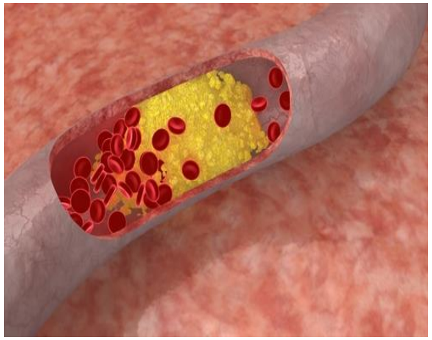
Náhodný jev – tvrzení o výsledku náhodného pokusu. O pravdivosti tohoto tvrzení lze po ukončení pokusu rozhodnout. Značíme velkými písmeny (A, B, X, Y, …).

Padne sudé číslo.

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Stanovení množství cholesterolu v krvi



Náhodný jev – tvrzení o výsledku náhodného pokusu. O pravdivosti tohoto tvrzení lze po ukončení pokusu rozhodnout. Značíme velkými písmeny (A, B, X, Y, …).

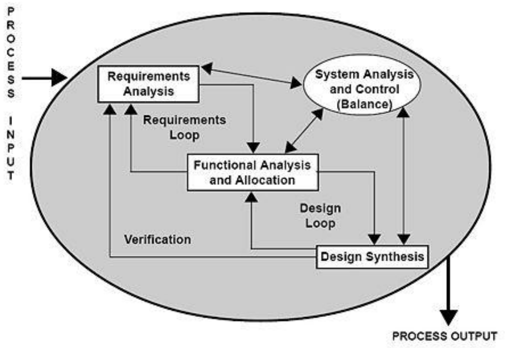
Zjištěná hodnota cholesterolu bude odpovídat normě.

Pro laika v oboru nutno specifikovat!!!

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus – děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Měření počtu požadavků za určité období



Náhodný jev – tvrzení o výsledku náhodného pokusu. O pravdivosti tohoto tvrzení lze po ukončení pokusu rozhodnout. Značíme velkými písmeny (A, B, X, Y, …).

Během jedné hodiny bude vytvořeno více než 300 funkčních požadavků.

Základní pojmy

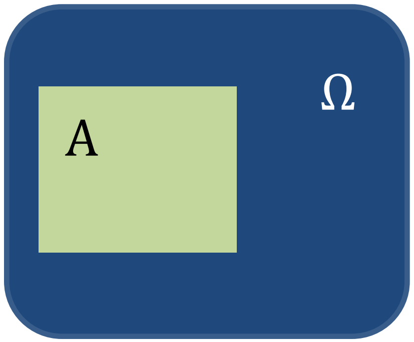
- **Náhodný pokus** – konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá
- **Náhodný jev** – tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o jehož pravdivosti můžeme po ukončení pokusu rozhodnout

  (značíme A, B, X, Y, …)
- **Elementární jev ω** – jednotlivý výsledek náhodného pokusu (nelze jej vyjádřit jako sjednocení dvou různých jevů)
- **Základní prostor Ω** – množina všech elementárních jevů
- **Náhodný jev** (jinak) – libovolná podmnožina základního prostoru

Typy jevů

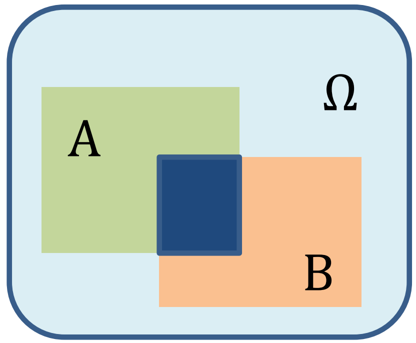
Padne „7“.	Padne „6“.	Padne méně než „7“.
Jev nemožný	Jev náhodný	Jev jistý
$\varnothing$		Ω

Vybrané vztahy mezi jevy



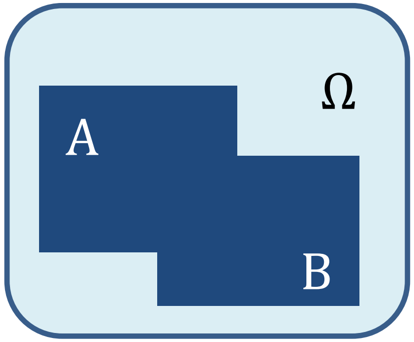
doplněk jevu *A*

$\bar{A}$



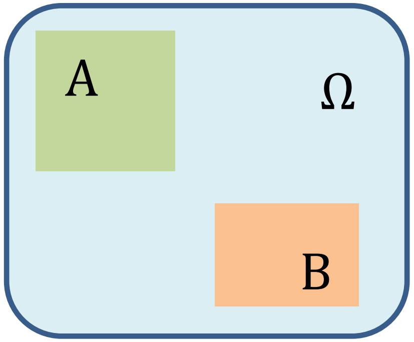
průnik jevů *A* a *B*

$A \cap B$

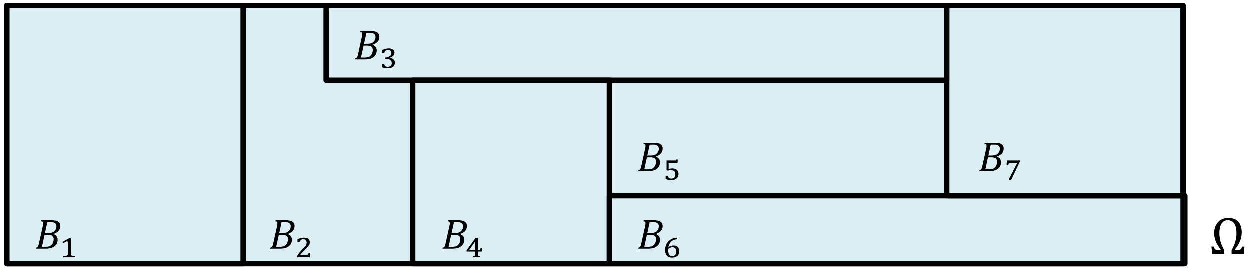


sjednocení jevů *A* a *B*

$A \cup B$



jevy disjunktní



úplná množina vzájemně disjunktních jevů

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i\,, kde\ \forall i \neq j\!:\ B_i \cap B_j = \emptyset$$

Co je to pravděpodobnost?

Číselné vyjádření šance,
že při náhodném pokusu daný jev nastane.

Jak pravděpodobnost definovat?

Počátky teorie pravděpodobnosti – 17. století

Jak rozdělit spravedlivě bank mezi hráče, byla-li série hazardních her ukončena předčasně?

Blaise Pascal (1623 – 1662)
zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

Pierre de Fermat (1601 – 1665)
zdroj: kids.britannica.com

Klasická definice pravděpodobnosti (Pierre Simon de Laplace, 1812)

Založena na předpokladu, že náhodný pokus může mít *n* různých, avšak **rovnocenných** výsledků.

Nechť Ω je množina ***n*** rovnocených elementárních jevů. Pravděpodobnost jevu *A*, jenž je složen z ***m*** těchto elementárních jevů je:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Mějme „férovou“ hrací kostku. Jaká je pravděpodobnost, že padne „6“?

Označme: A … padne „6“, pak $P(A) = \frac{1}{6}$.

Statistická definice pravděpodobnosti (Richard von Mises, počátek 20. století)

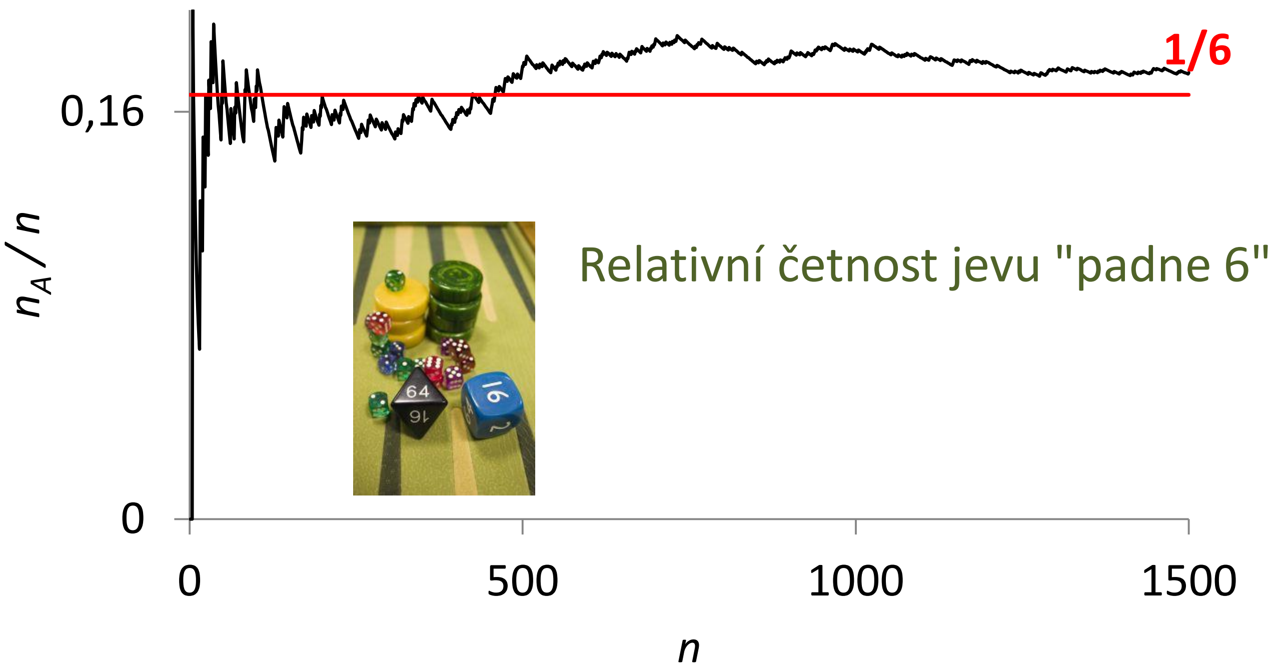
$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Počet realizací pokusu **příznivých** jevu A

Počet **všech** realizací pokusu

Jaká je pravděpodobnost padnutí „6“ na hrací kostce, nevíme-li, zda je tato kostka „férová“?

Statistická definice pravděpodobnosti



$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Geometrická pravděpodobnost

Zobecnění klasické pravděpodobnosti pro případ, kdy počet všech možných výsledků náhodného pokusu je nespočetný.

V rovině (případně na přímce nebo v prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další uzavřená oblast A. Pravděpodobnost jevu A, který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti A je:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Jaká je pravděpodobnost, že meteorit dopadl na pevninu?

Kolmogorovův axiomatický systém (Andrej Nikolajevič Kolmogorov, 1933)

- Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo mezi 0 a 1 (včetně).
2. Pravděpodobnost, že nějaký jev nastane (pravděpodobnost jevu jistého) je rovna 1.
3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna součtu jejich pravděpodobností. A to pro každých spočetně mnoho jevů.

Vybrané vlastnosti pravděpodobnosti

Nechť množina Ω obsahuje *n* elementárních jevů, nechť *P* je pravděpodobnost na této množině, *A* a *B* jevy. Potom platí :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - *A, B* … **disjunktní jevy** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5. $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$
   - *A, B* … **nezávislé jevy** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

1. Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu lékař napsal prášky. V příbalovém letáku se Ondra dočetl, že mají dva možné nežádoucí účinky:

   a) vypadání zubů (15%),
   b) upadnutí palců na rukou (20%).

   Zároveň je v letáku napsáno, že nebyla prokázána závislost mezi výskytem jednotlivých typů nežádoucích účinků.

   S jakou pravděpodobností se bude moci Ondra po ukončení léčby kousnout do palce?

(dle: Luboš Pick; přednáška „Dirichletovy šuplíčky“ na semináři OSMA)

Z … Ondra bude mít po ukončení léčby zuby

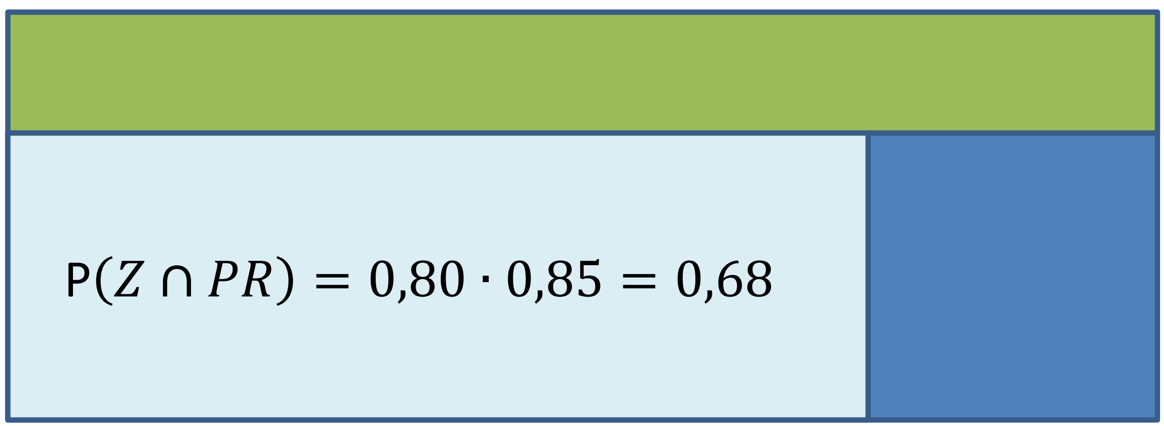
PR … Ondra bude mít po ukončení léčby prsty na rukou

$$P(Z) = 0{,}85, P(PR) = 0{,}80$$

S jakou pravděpodobností se bude moci Ondra po ukončení léčby kousnout do palce?

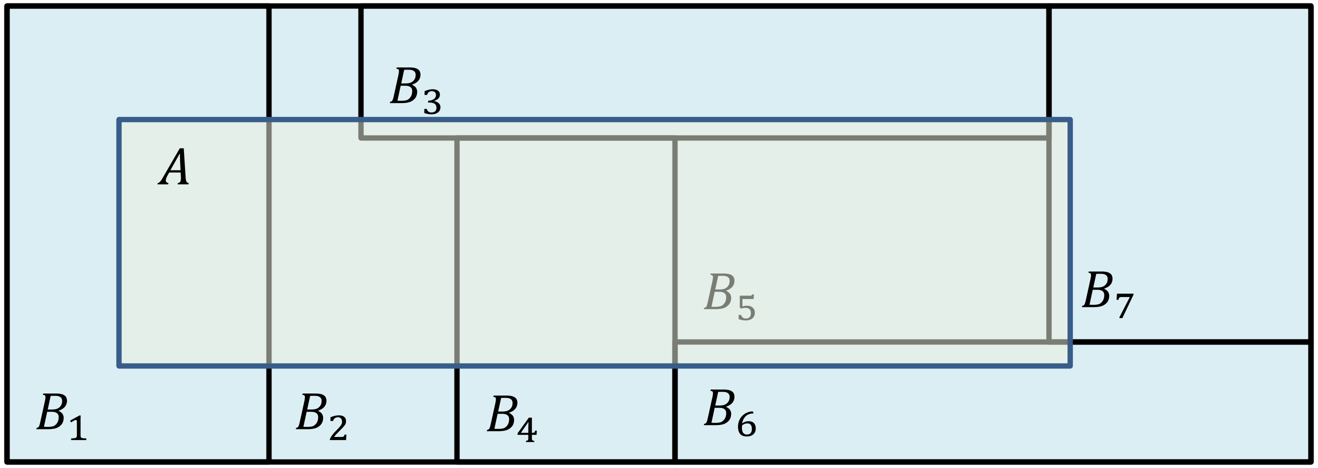
$\mathrm{P}(\bar{Z}) = 0{,}15$

$\mathrm{P}(Z) = 0{,}85$



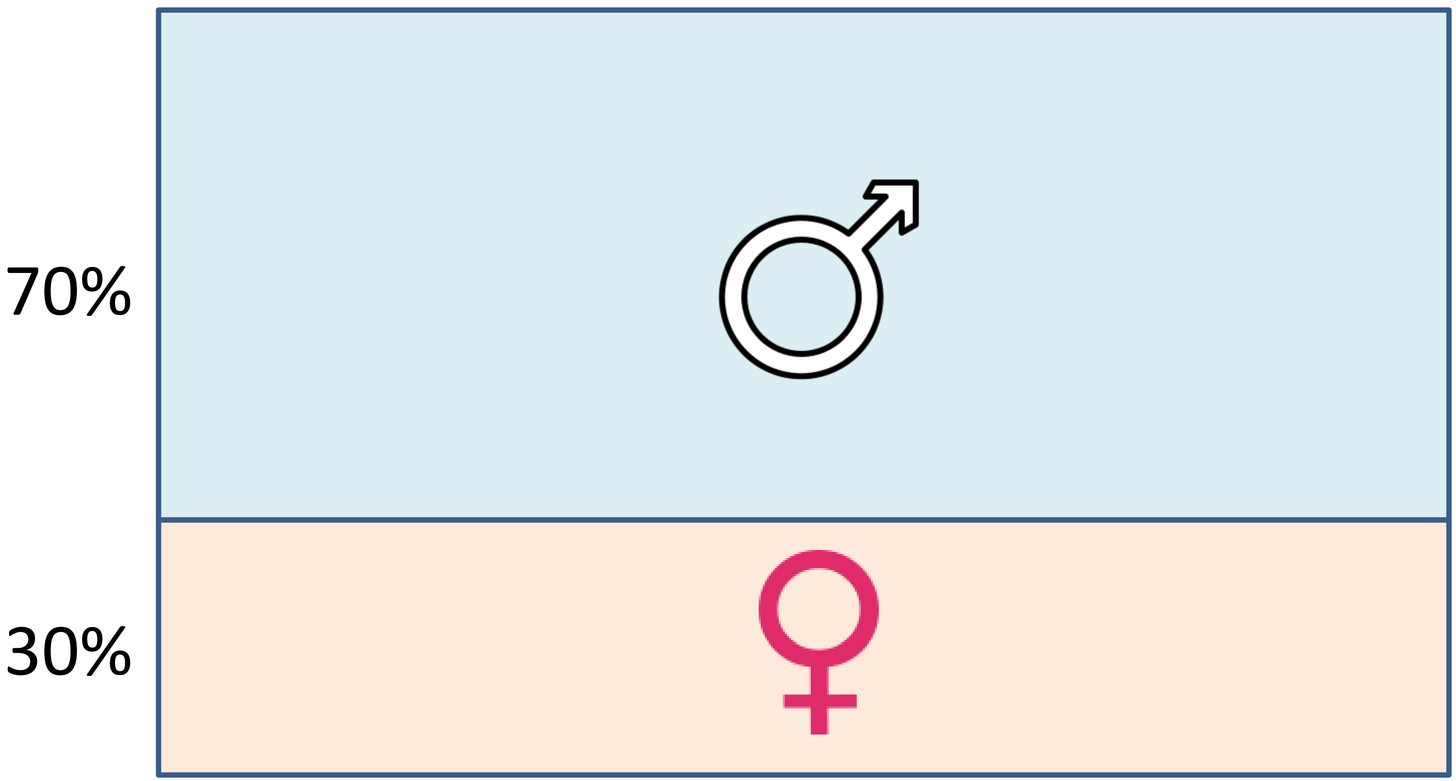
$\mathrm{P}(PR) = 0{,}80$ $\mathrm{P}(\overline{PR}) = 0{,}20$

Věta o úplné pravděpodobnosti

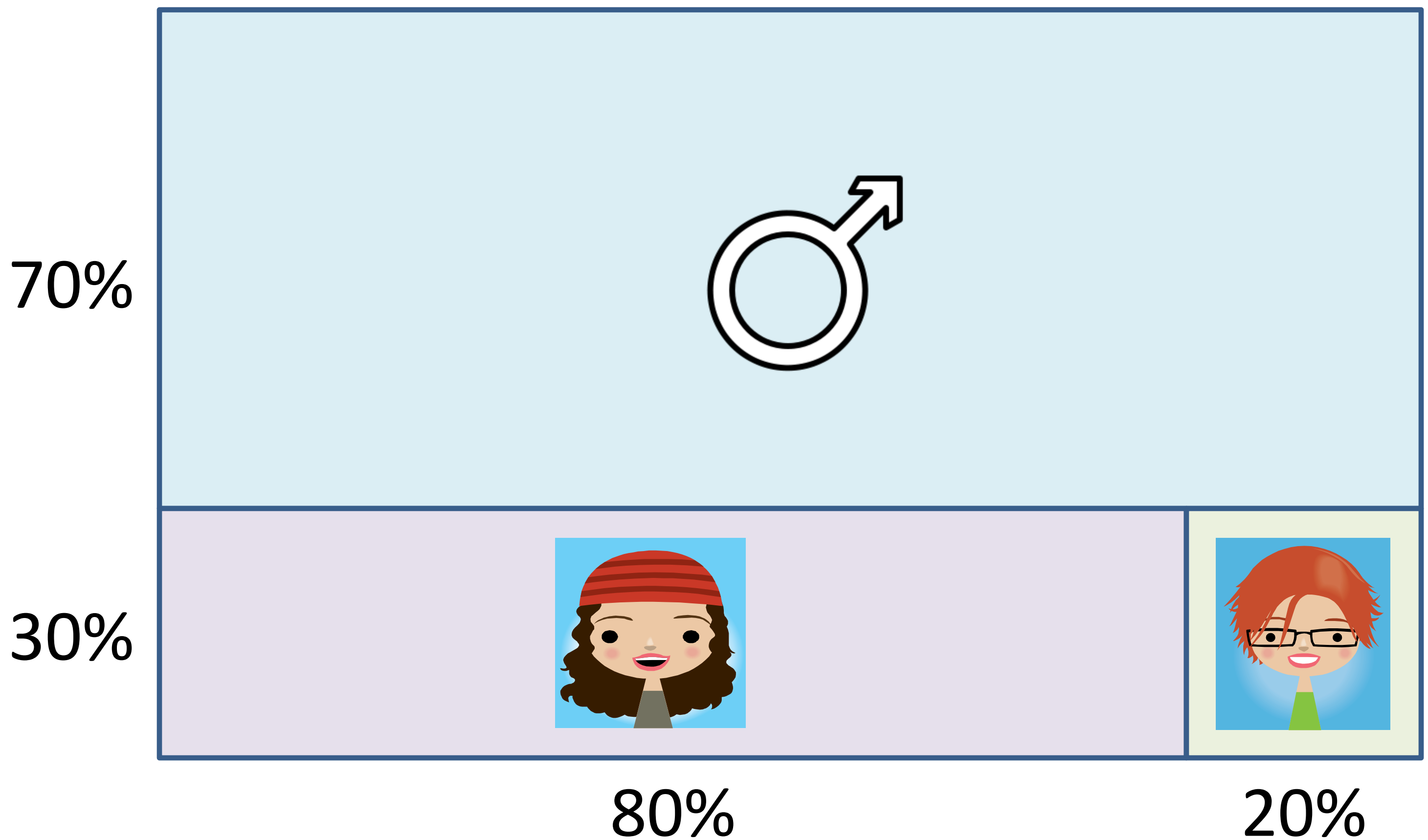


$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

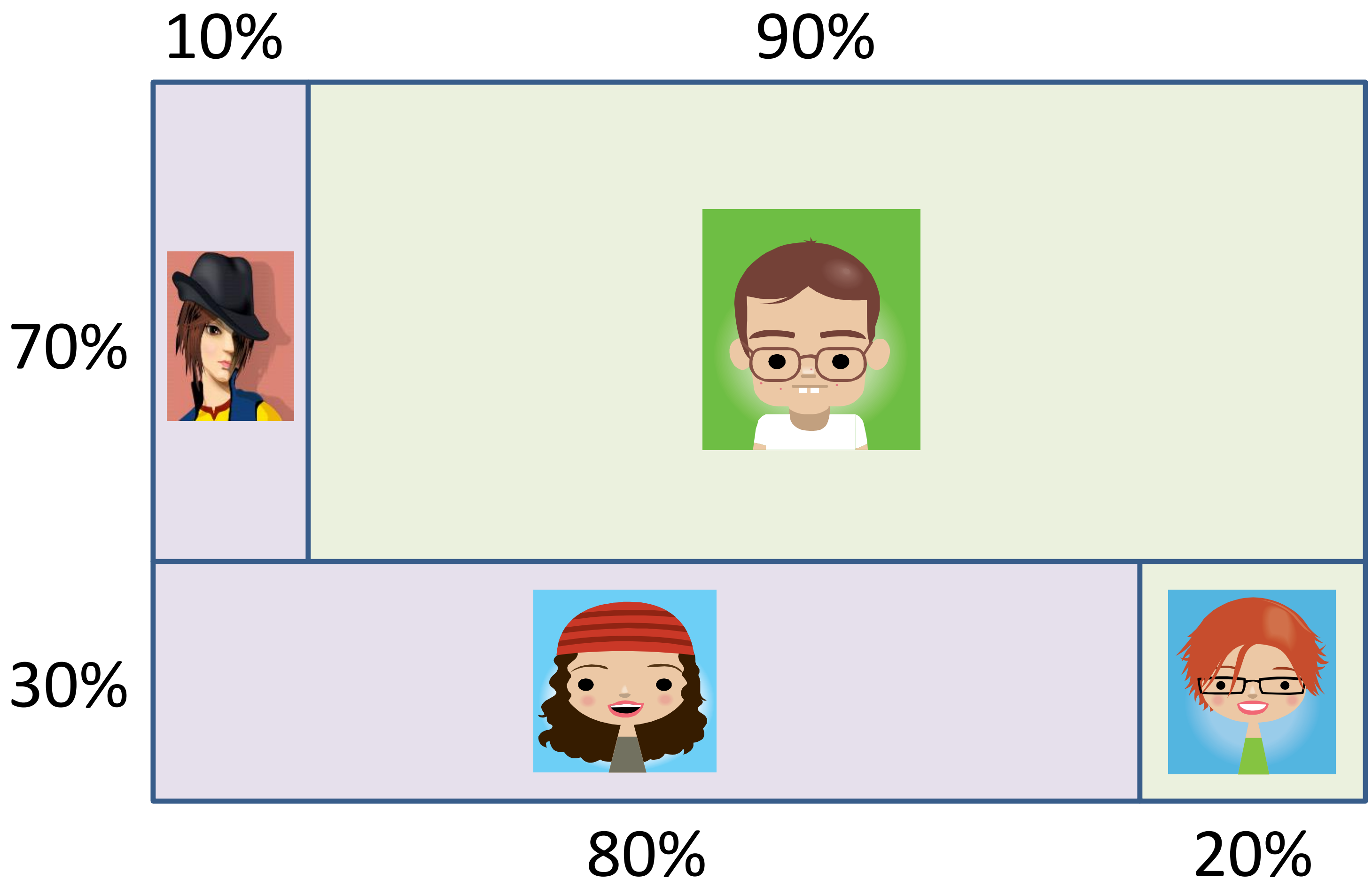
2. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?



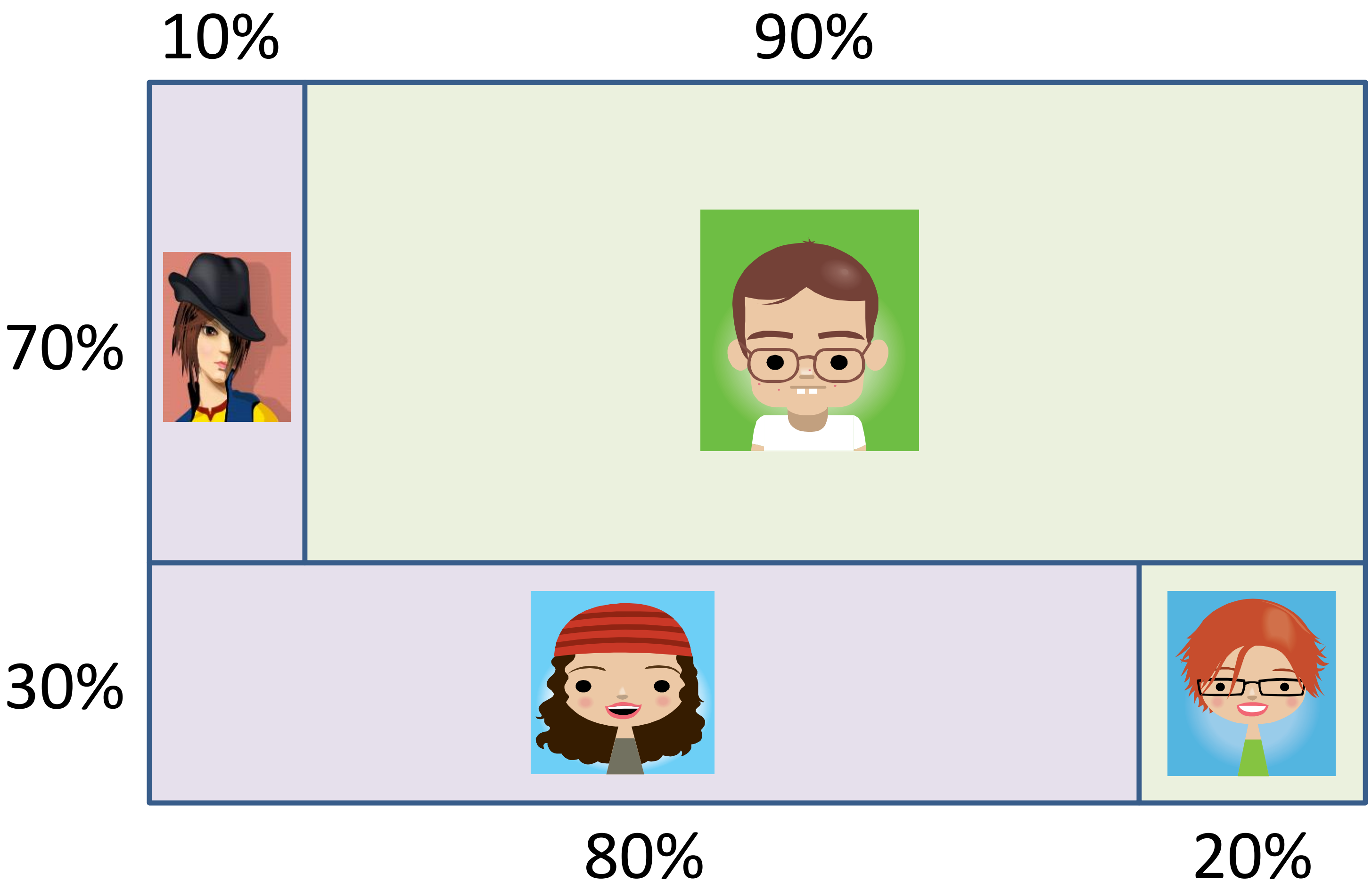
2. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?



2. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student má dlouhé vlasy?

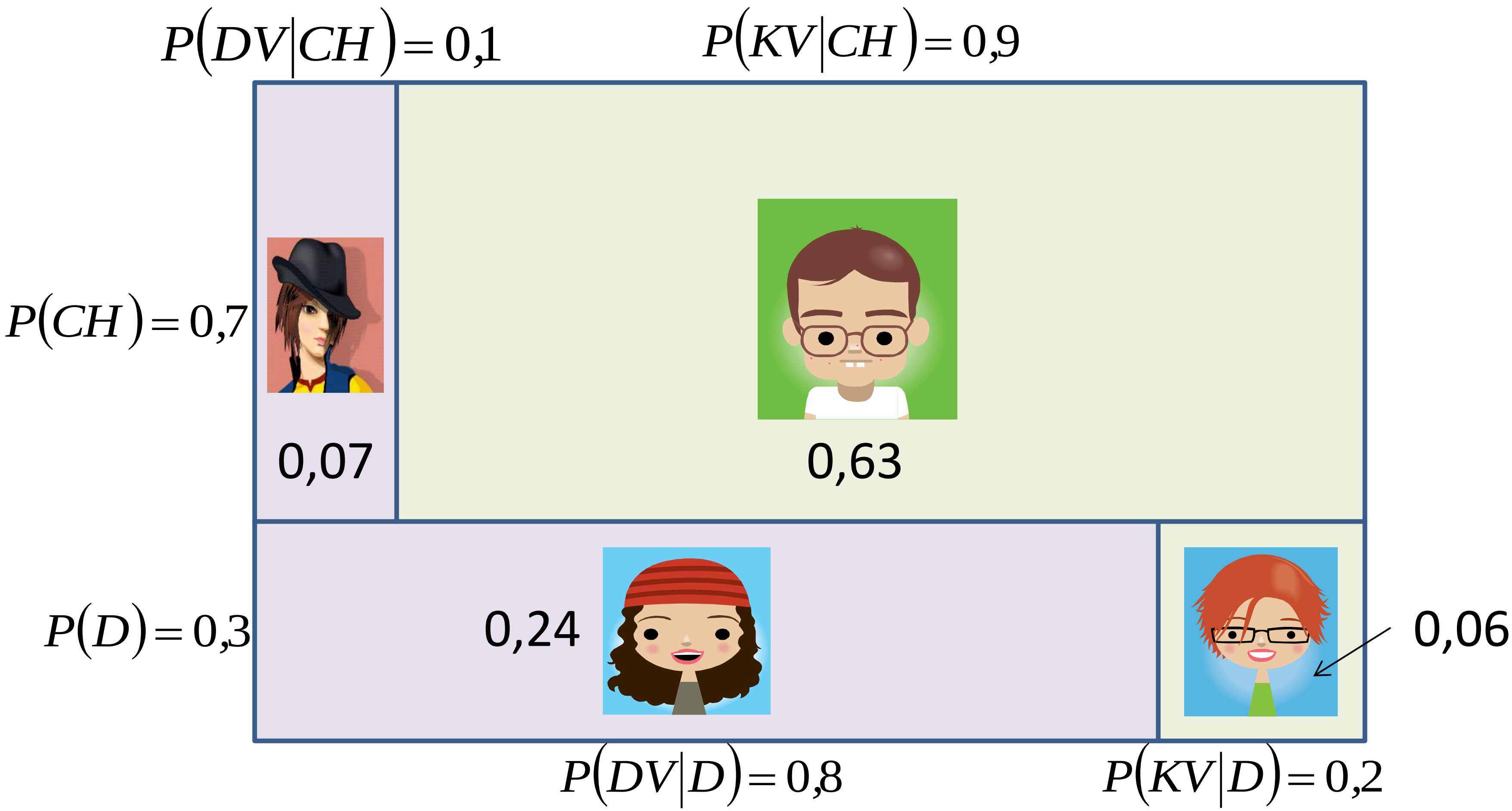


Pravoúhlý Vennův diagram

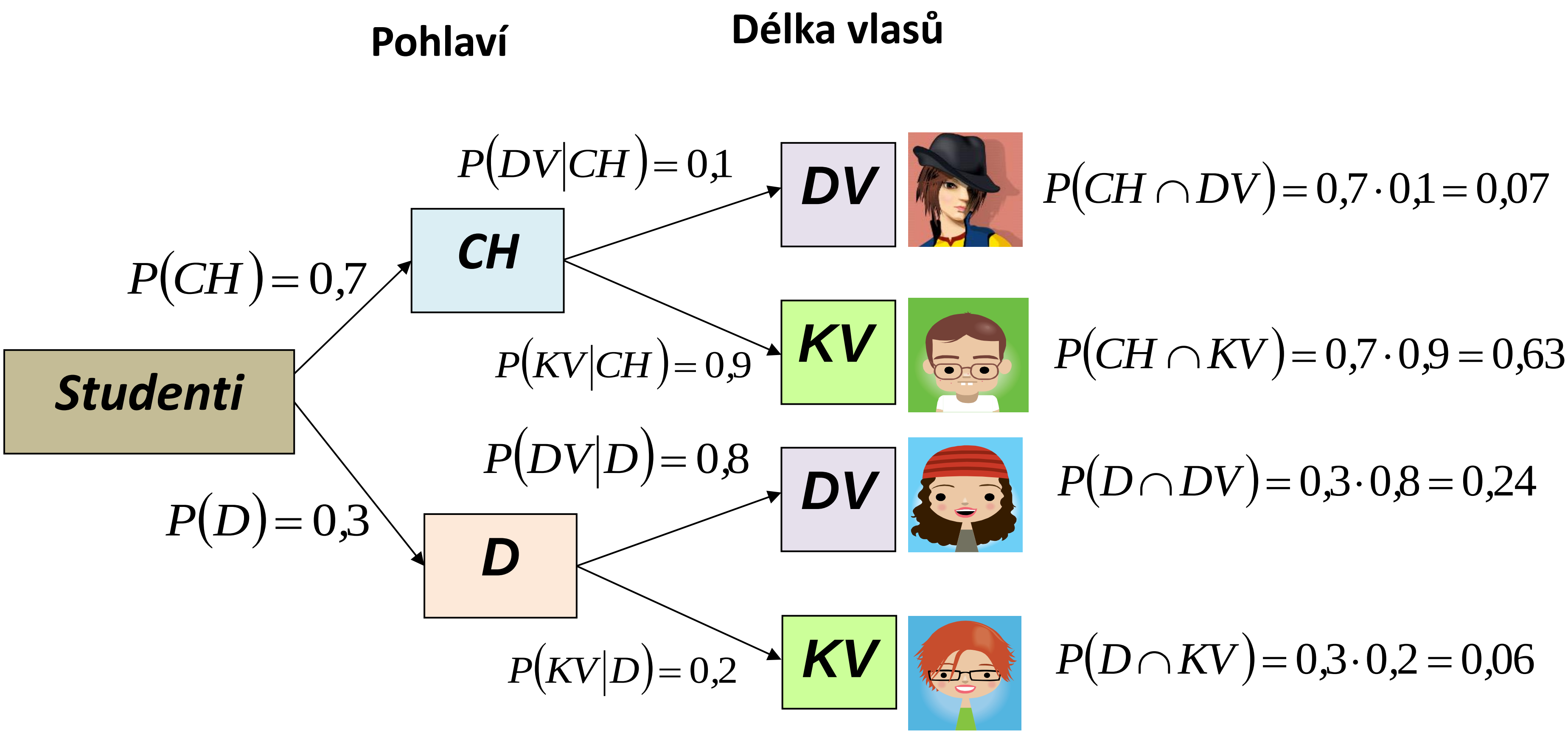


$$P(DV) = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$

$$P(DV) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}31$$

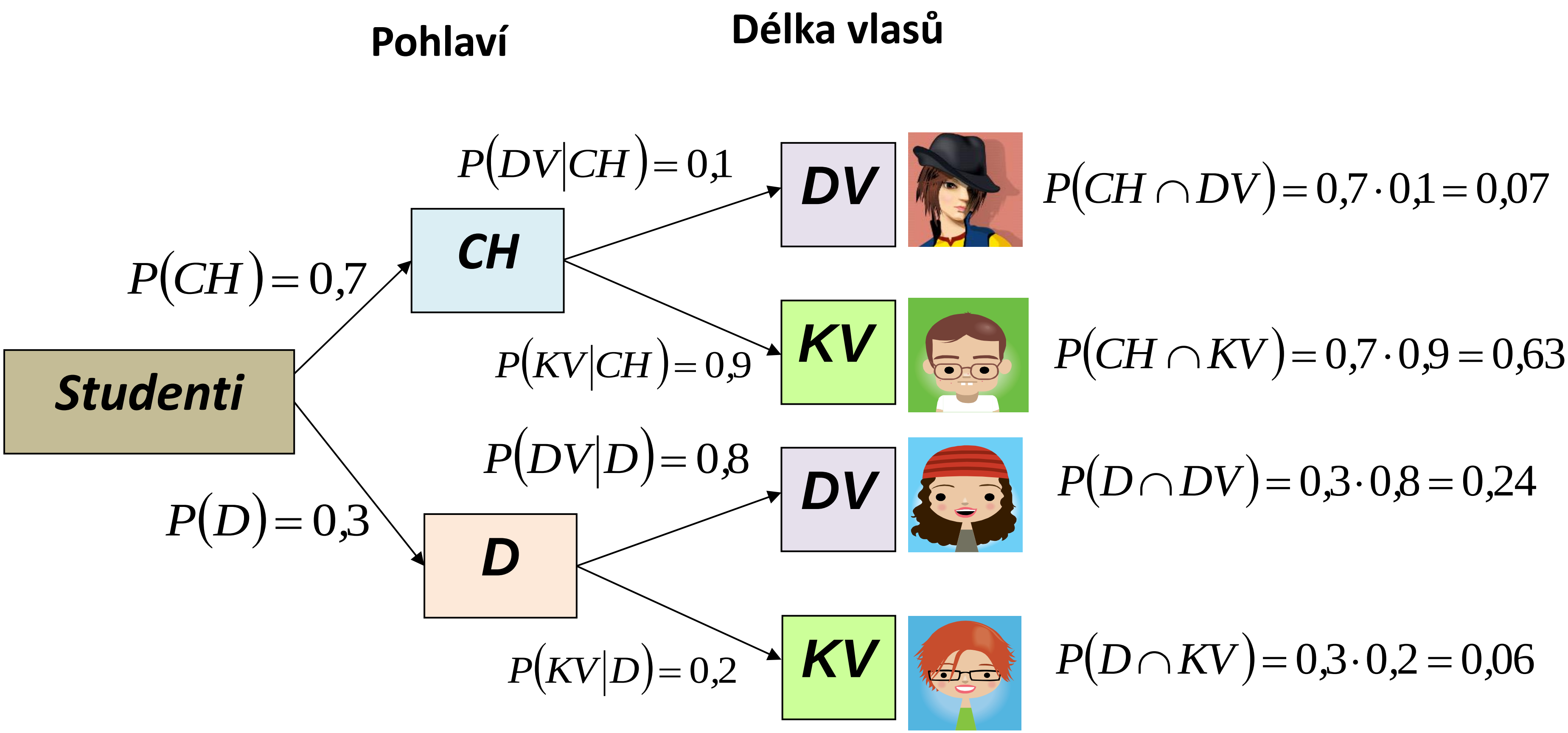


Rozhodovací strom



$$P(DV) = P(DV \cap D) + P(DV \cap CH) = P(DV|D) \cdot P(D) + P(DV|CH) \cdot P(CH)$$

$$P(DV) = 0{,}24 + 0{,}07 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}31$$



Bayesův teorém

Thomas Bayes
(1702 – 1761)

zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes

$$P\left(B_k \middle| A\right) = \frac{P\left(A \cap B_k\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A \cap B_k\right)}{\sum_{(i)} P\left(A \cap B_i\right)}$$

2. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.

A)

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

70 %

Apriorní pravděpodobnost

2. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.

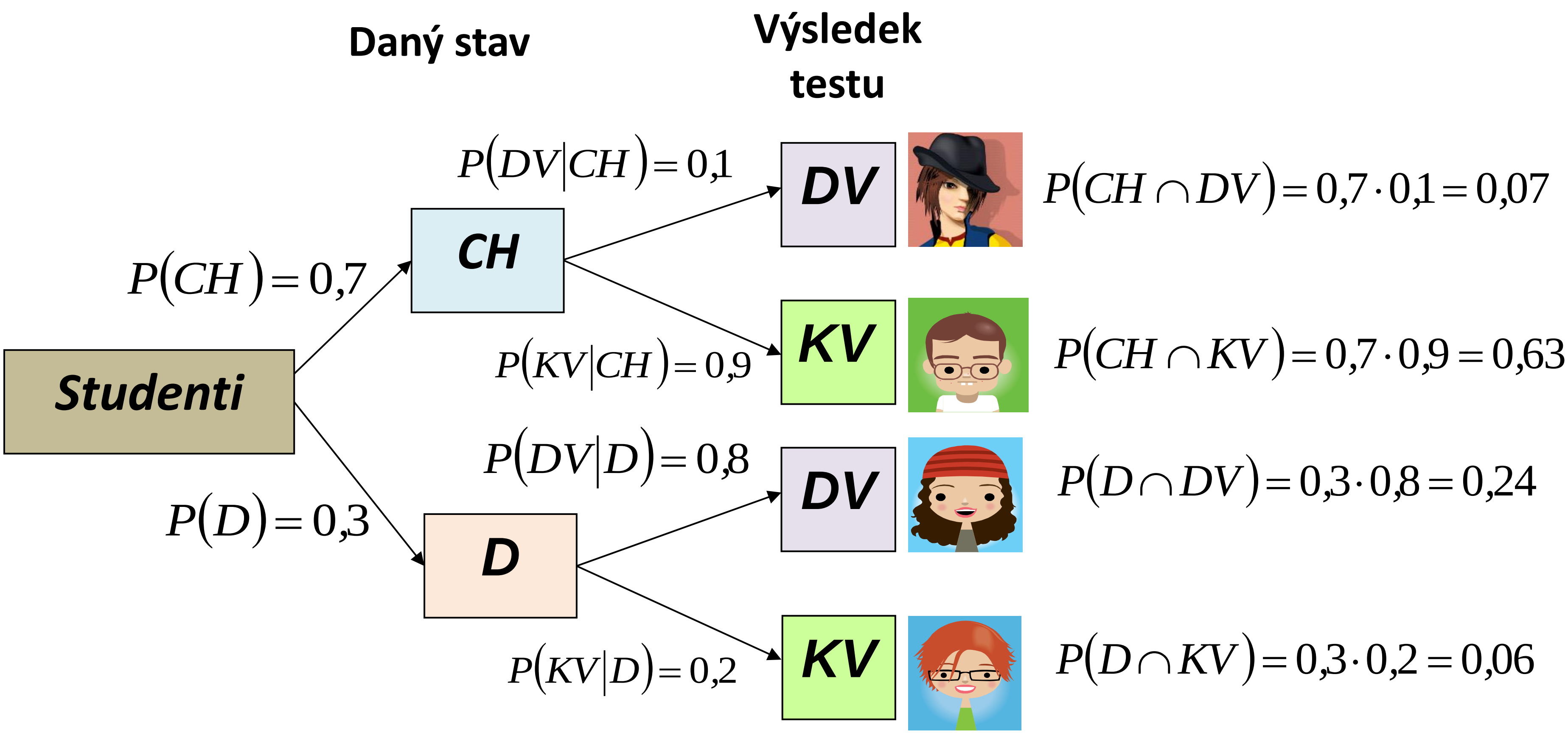
B)

Náhodně vybraný student má dlouhé vlasy.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

Aposteriorní pravděpodobnost

$$P(DV) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}31$$

$$P(CH|DV) = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV)} = \frac{0{,}07}{0{,}31} \cong 0{,}226$$



2. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.

B)

Náhodně vybraný student má dlouhé vlasy.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je chlapec?

$$P(CH|DV) = \frac{P(CH \cap DV)}{P(DV)} = \frac{0{,}07}{0{,}31} \cong 0{,}226$$

Aposteriorní pravděpodobnost

3. V jednom městě jezdí 85% zelených taxíků a 15% modrých. Svědek dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič modrého taxíku, který pak ujel. Testy provedené za obdobných světelných podmínek ukázaly, že svědek dobře identifikuje barvu taxíku v 80% případů a ve 20% případů se mýlí.
A) Jaká je pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?
B) Pak byl nalezen další nezávislý svědek, který rovněž tvrdí, že taxík byl modrý. Jaká je nyní pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?

Úlohu prezentovali psychologové Kahneman a Tversky
(Anděl; Matematika náhody; 2007)

Označme:

M … taxík byl modrý

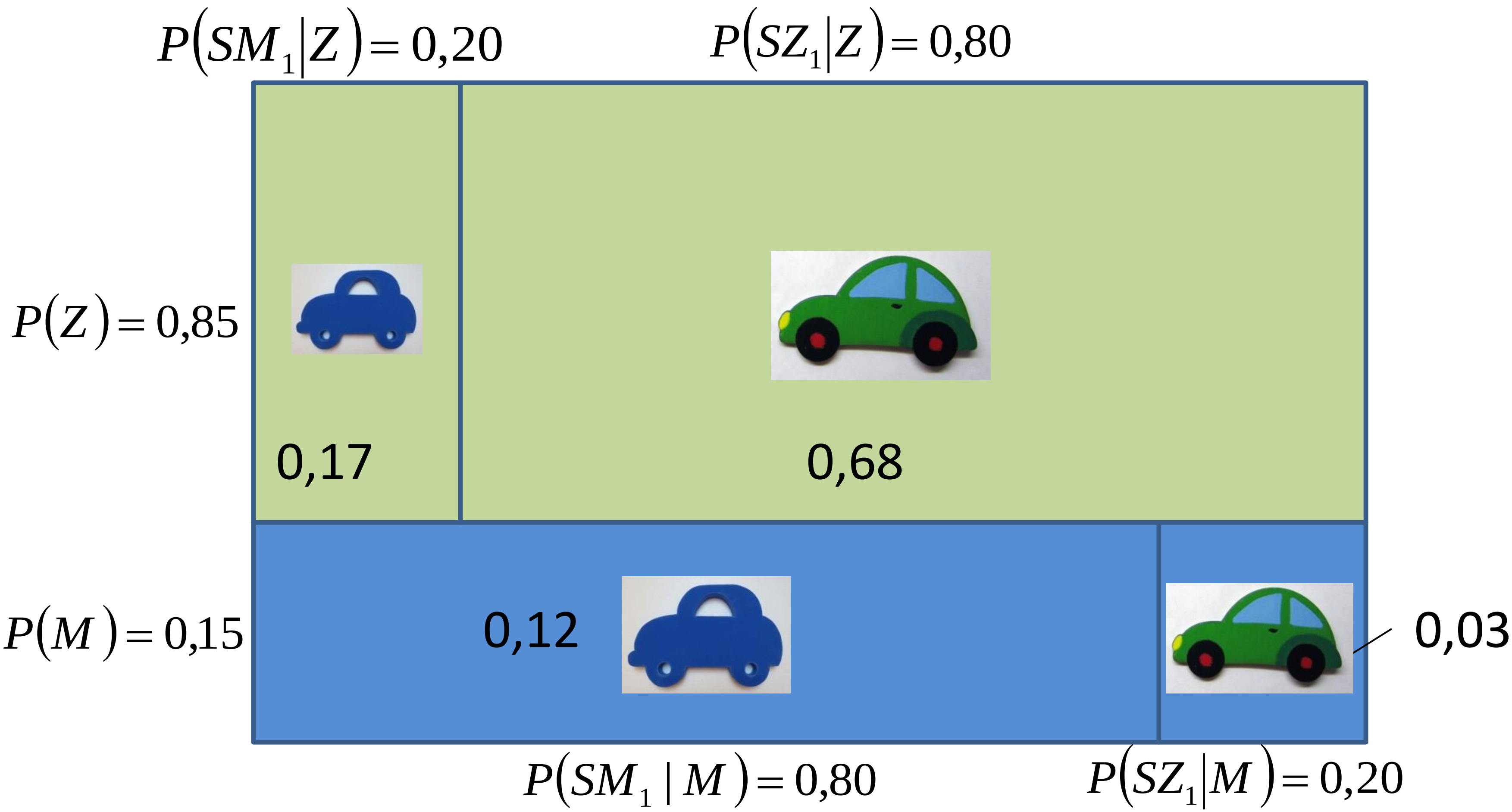
Z … taxík byl zelený

SM_1 (SZ_1) … první svědek viděl modrý (zelený) taxík

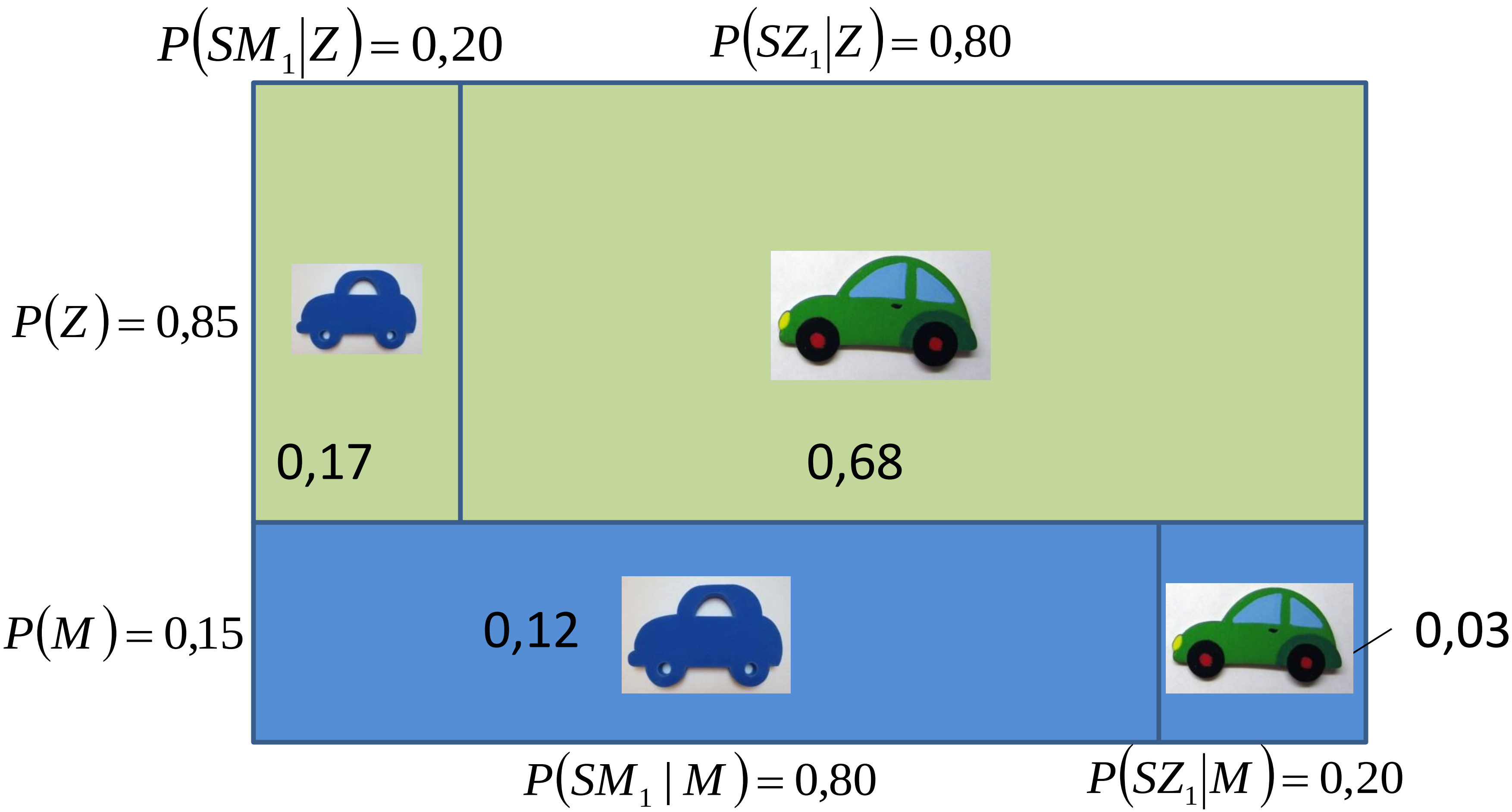
SM_2 (SZ_2) … druhý svědek viděl modrý (zelený) taxík

$$P(SM_1) = P(SM_1 \cap M) + P(SM_1 \cap Z) = P(SM_1 | M) \cdot P(M) + P(SM_1 | Z) \cdot P(Z)$$

$$P(SM_1) = 0{,}80 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}85 = 0{,}29$$



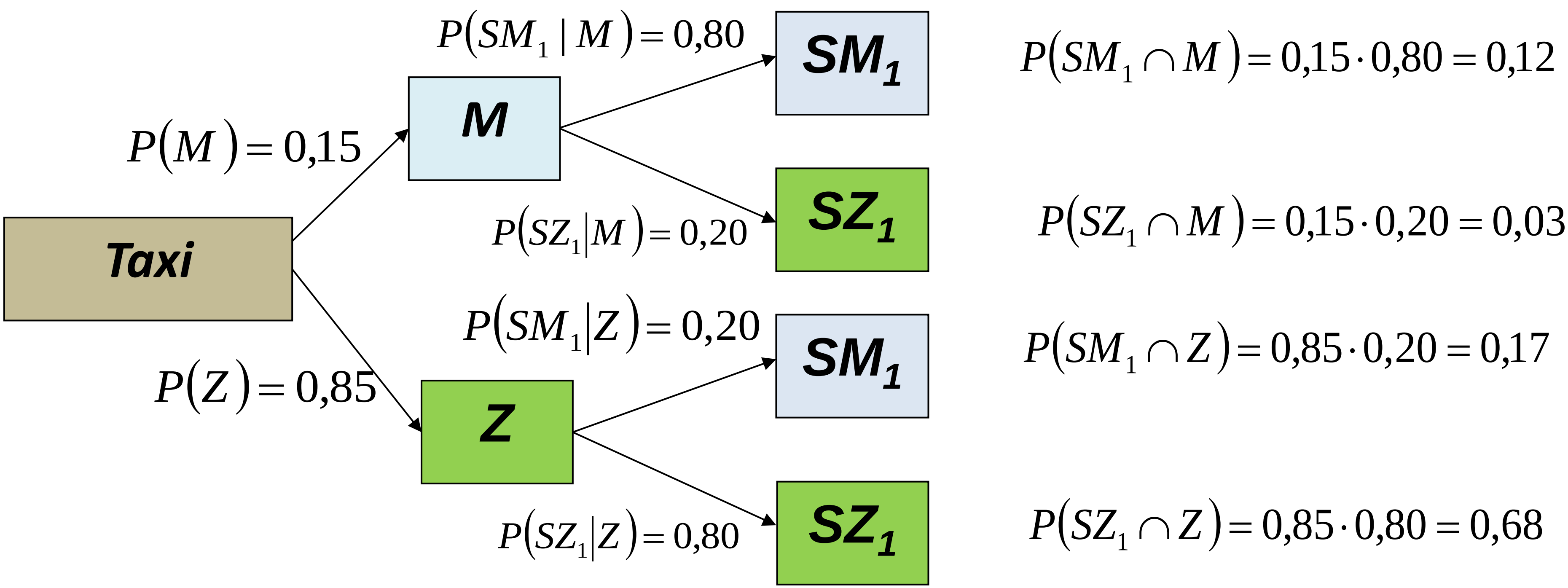
$$P\left(M\middle|SM_1\right)=\frac{P\left(SM_1\cap M\right)}{P\left(SM_1\right)}=\frac{0{,}12}{0{,}17+0{,}12}\cong 0{,}4138$$



$$P(M|SM_1) = \frac{P(SM_1 \cap M)}{P(SM_1)} = \frac{0{,}12}{0{,}17 + 0{,}12} \cong 0{,}4138$$

Daný stav (před výpovědi svědků)

Výsledek výpovědi 1. svědka



Situace před výpovědi prvního svědka:

$$P(M) = \mathbf{0,15}, P(Z) = 0{,}15$$

Situace po výpovědi prvního svědka:

$$P(M|SM_1) = \mathbf{0,4138}, P(Z|SM_1) = 0{,}5862$$

4. V jednom městě jezdí 85% zelených taxíků a 15% modrých. Svědek dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič modrého taxíku, který pak ujel. Testy provedené za obdobných světelných podmínek ukázaly, že svědek dobře identifikuje barvu taxíku v 80% případů a ve 20% případů se mýlí.
   A) Jaká je pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?
   B) Pak byl nalezen další nezávislý svědek, který rovněž tvrdí, že taxík byl modrý. Jaká je nyní pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?

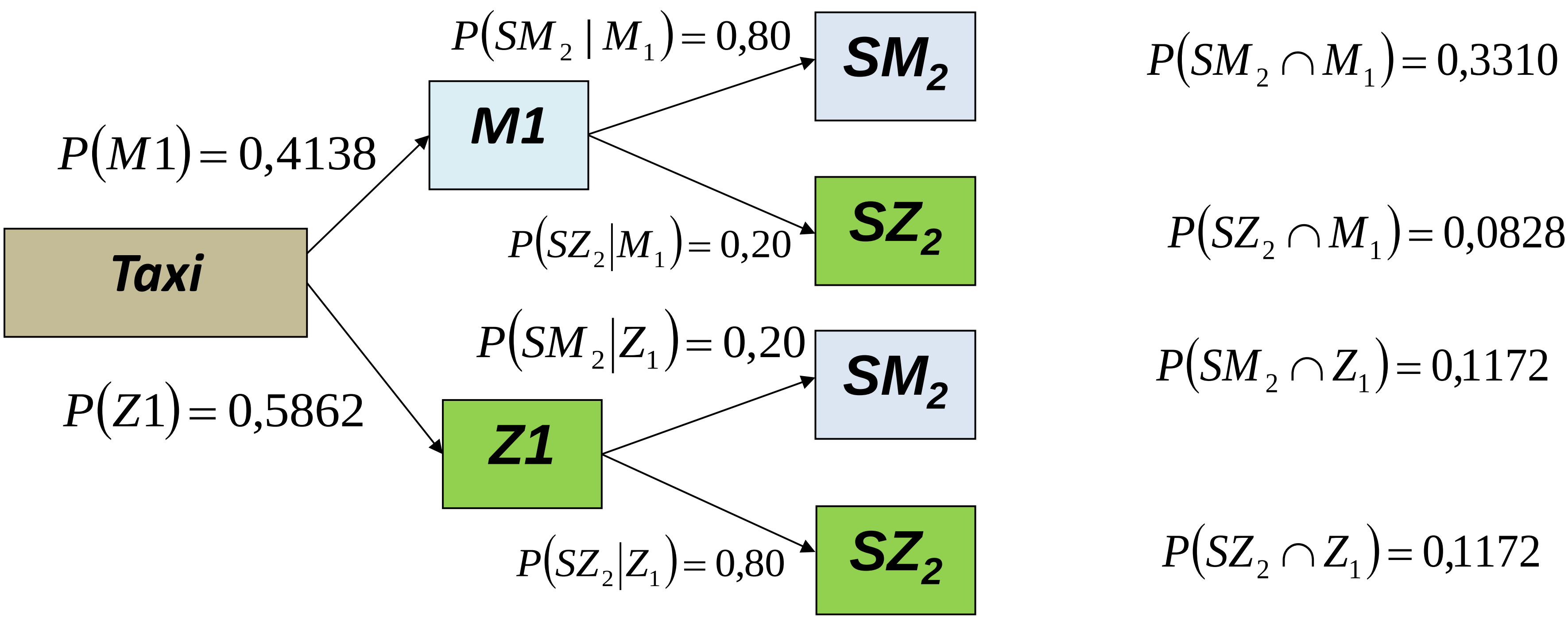
Úlohu prezentovali psychologové Kahneman a Tversky
(Anděl; Matematika náhody; 2007)

$$P(SM_2) = 0{,}4482$$

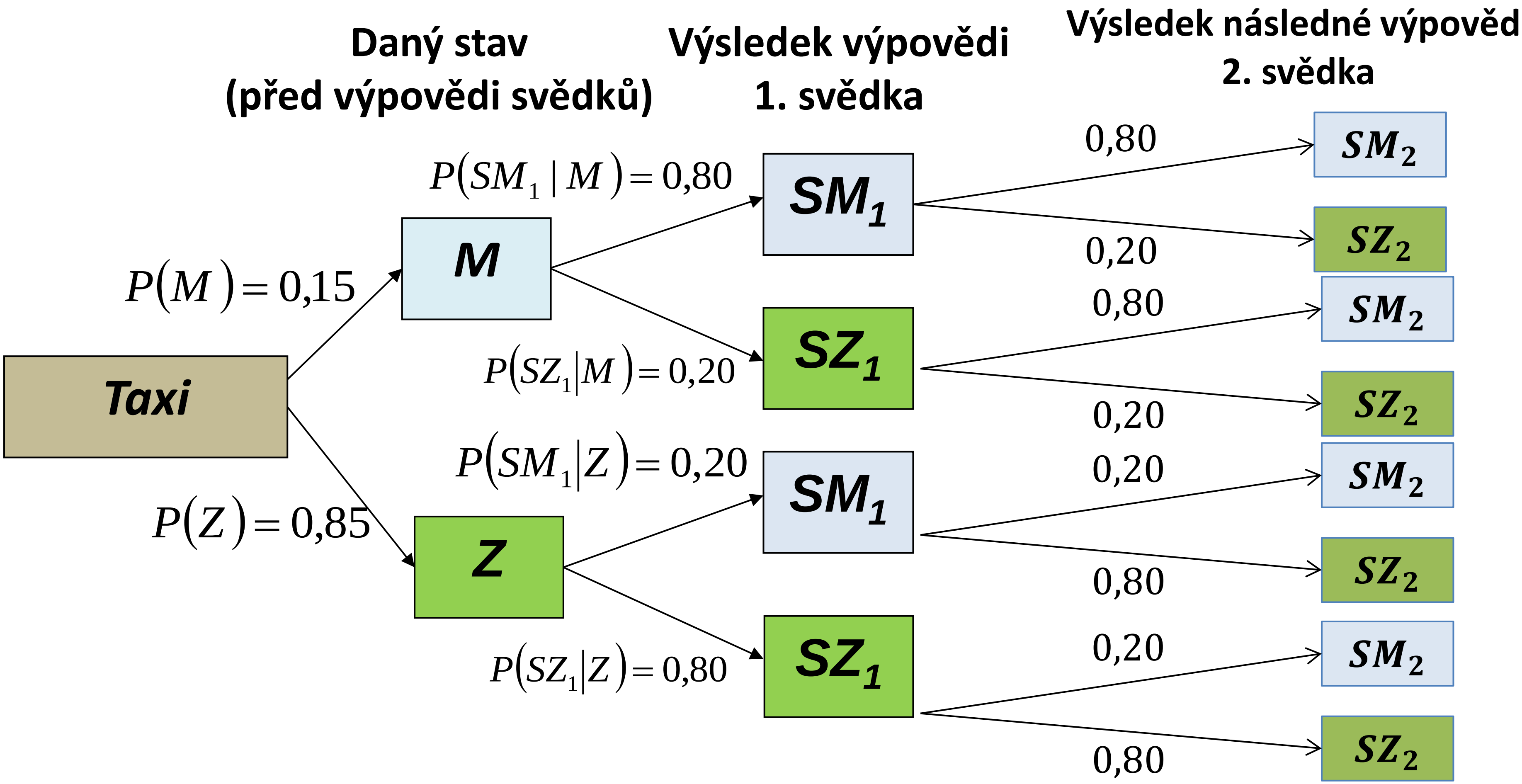
$$P(M1 | SM_2) = \frac{P(SM_2 \cap M1)}{P(SM_2)} = \frac{0{,}3310}{0{,}4482} \cong 0{,}7386$$

Daný stav (po výpovědi 1. svědka)

Výsledek výpovědi 2. svědka



$$P\big(M|(SM_1 \cap SM_2)\big) = \frac{P\big(M \cap (SM_1 \cap SM_2)\big)}{P(SM_1 \cap SM_2)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}85 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2} \cong \mathbf{0{,}7385}$$



Situace před výpovědi prvního svědka:

$$P(M) = \mathbf{0,1500}, P(Z) = 0{,}8500$$

Situace po výpovědi prvního svědka:

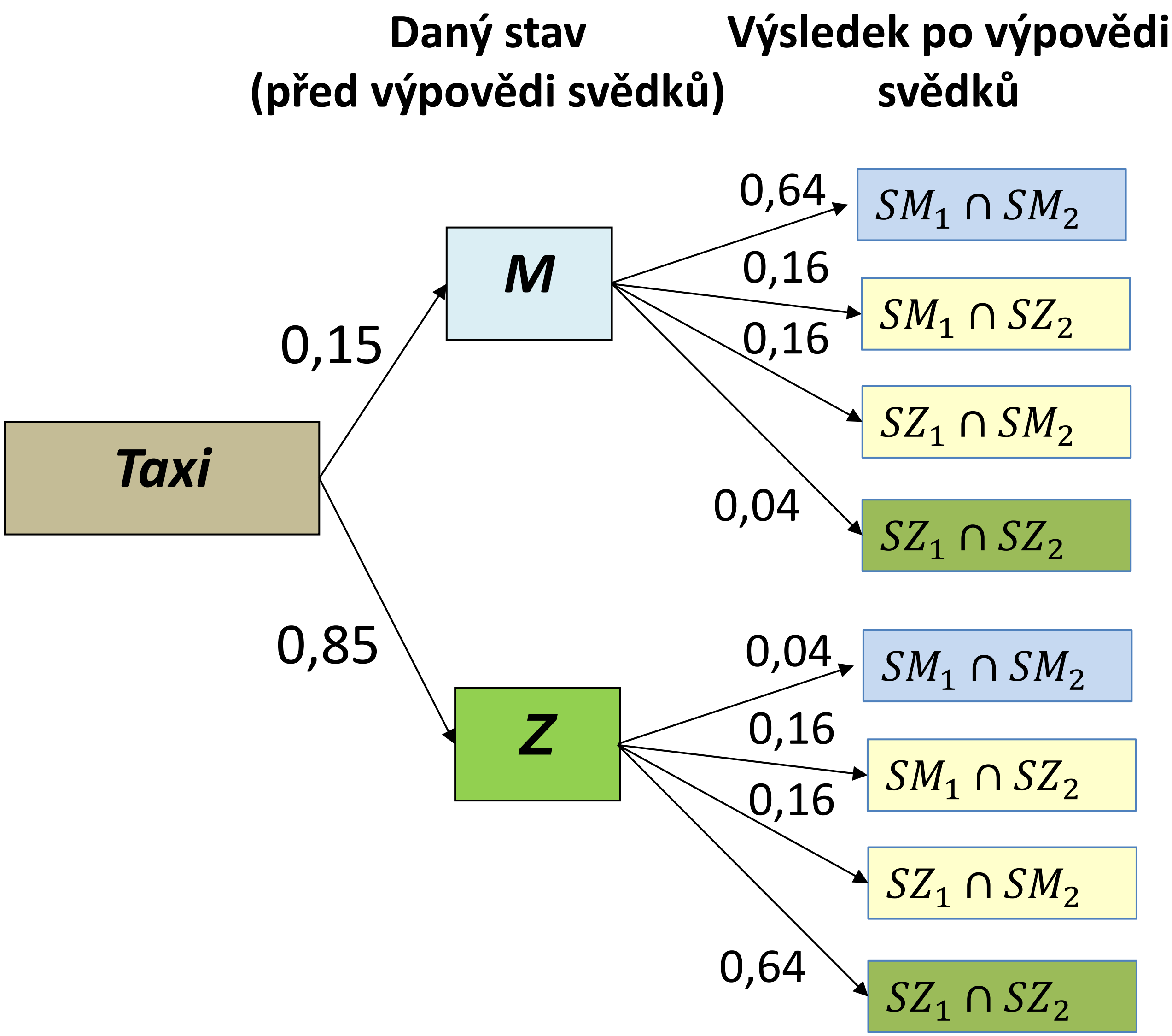
$$P(M|SM_1) = \mathbf{0,4138}, P(Z|SM_1) = 0{,}5862$$

Situace po výpovědi druhého svědka:

$$P(M|SM_1, SM_2) = \mathbf{0,7386}, \qquad P(Z|SM_1, SM_2) = 0{,}2614$$

Záleží na tom, zda svědkové vypovídali postupně nebo současně?

$$P\big(M|(SM_1 \cap SM_2)\big) = \frac{P\big(M \cap (SM_1 \cap SM_2)\big)}{P(SM_1 \cap SM_2)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}64}{0{,}15 \cdot 0{,}64 + 0{,}85 \cdot 0{,}04} \cong 0{,}7386$$



Situace před výpovědi prvního svědka:

$$P(M) = \mathbf{0,1500}, P(Z) = 0{,}8500$$

Situace po výpovědi prvního svědka:

$$P(M|SM_1) = \mathbf{0,4138}, P(Z|SM_1) = 0{,}5862$$

Situace po výpovědi druhého svědka (následně vypovídajícího):

$P(M|SM_1, SM_2) = \mathbf{0,7386}$, $\qquad P(Z|SM_1, SM_2) = 0{,}2614$

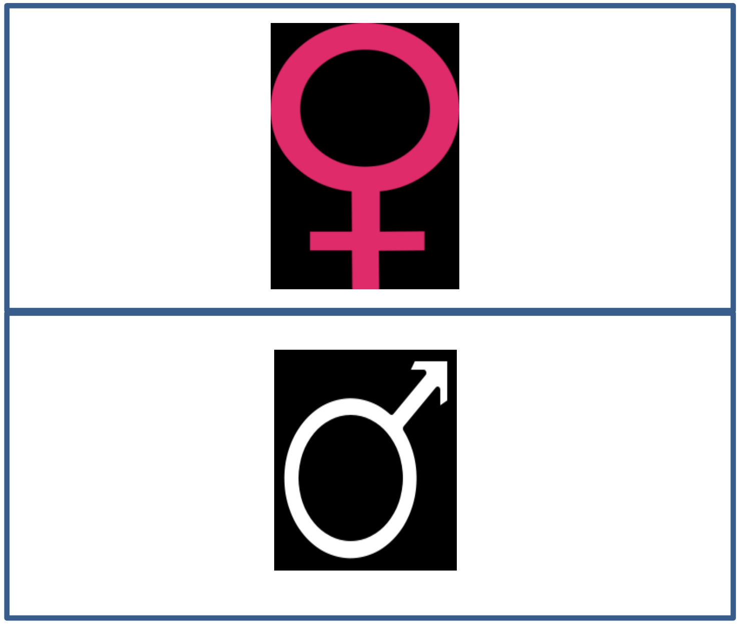
Situace po výpovědi dvou svědků vypovídajících zároveň:

$P(M|SM_1, SM_2) = \mathbf{0,7386}$, $\qquad P(Z|SM_1, SM_2) = 0{,}2614$

4. Rodina má dvě děti.

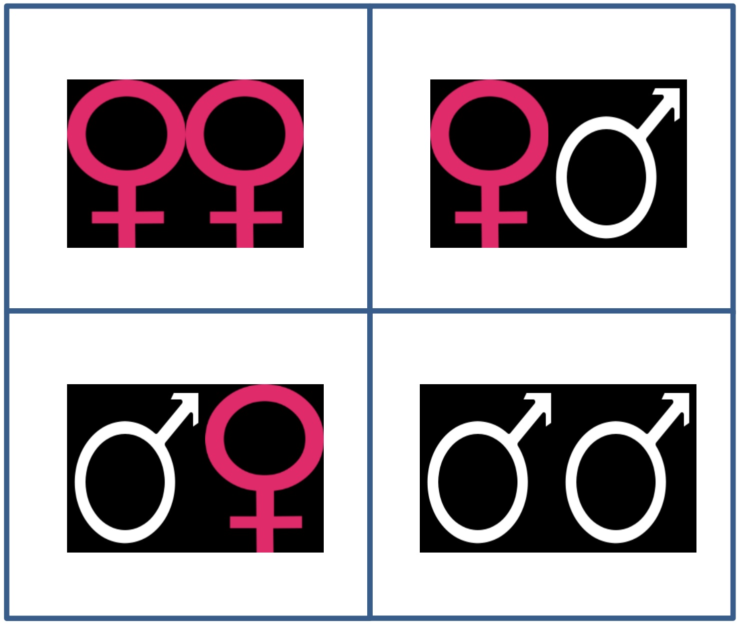
A) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



4. Rodina má dvě děti.
   A) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

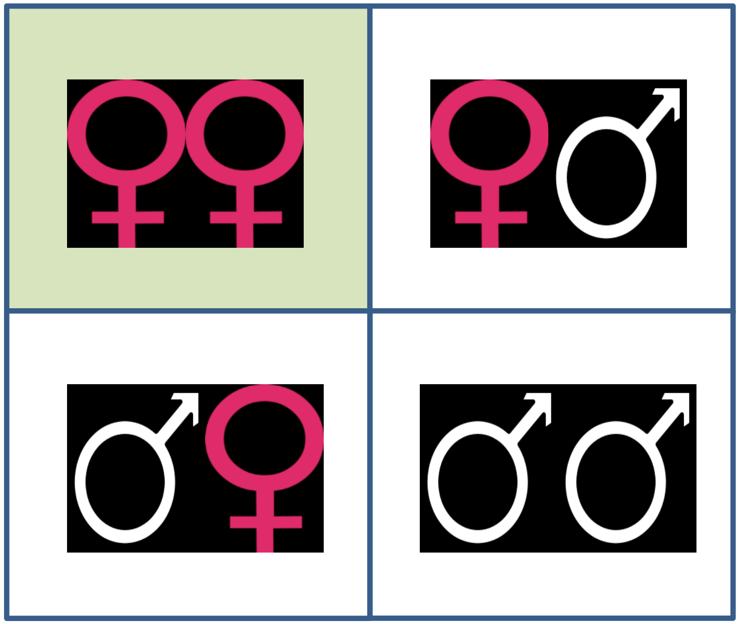
Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



4. Rodina má dvě děti.

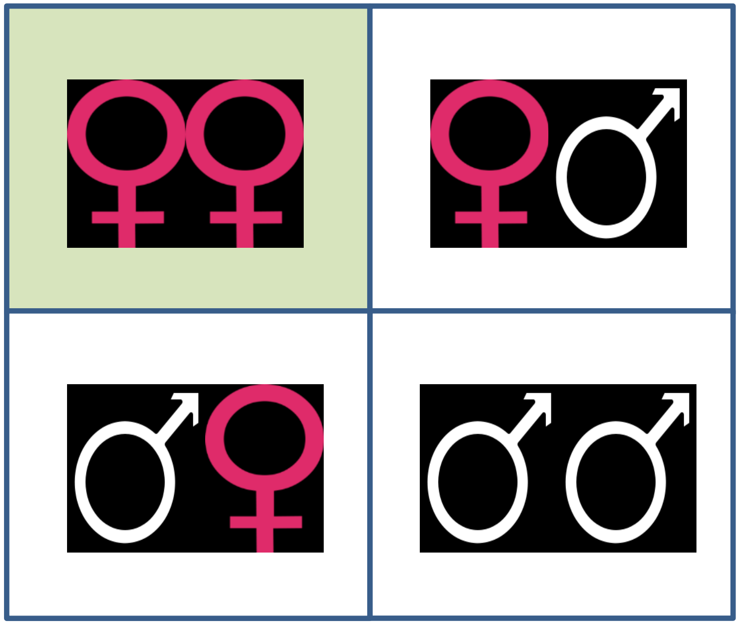
A) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



4. Rodina má dvě děti.
   A) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

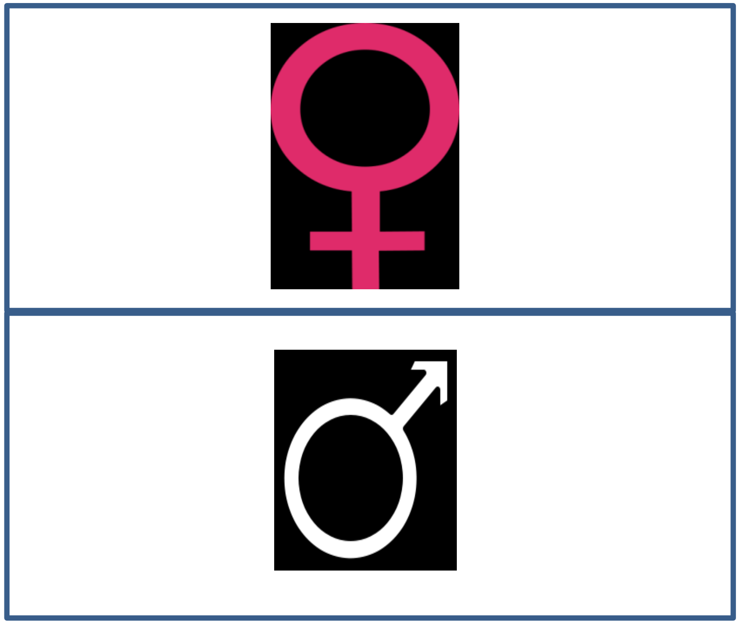
Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



$$P(DD) = \frac{1}{4}$$

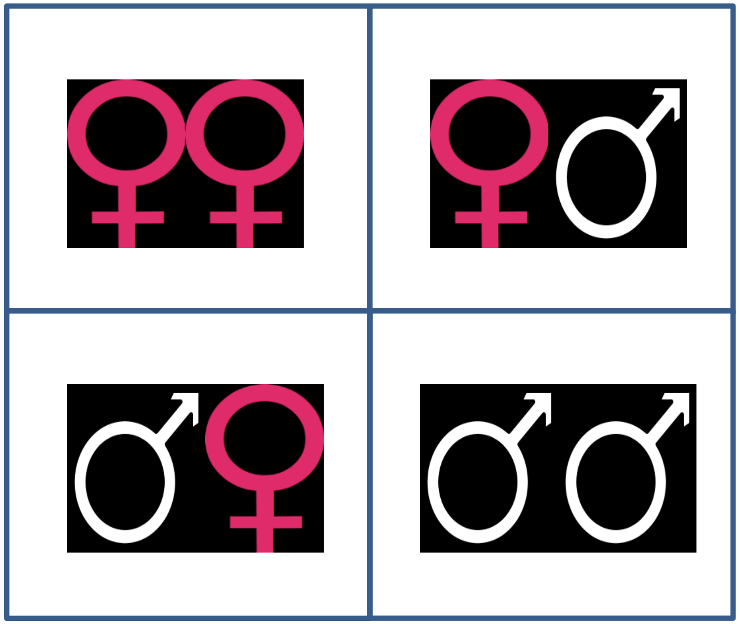
4. Rodina má dvě děti. Jedno z nich je dívka.
   B) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



4. Rodina má dvě děti. Jedno z nich je dívka.
   B) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

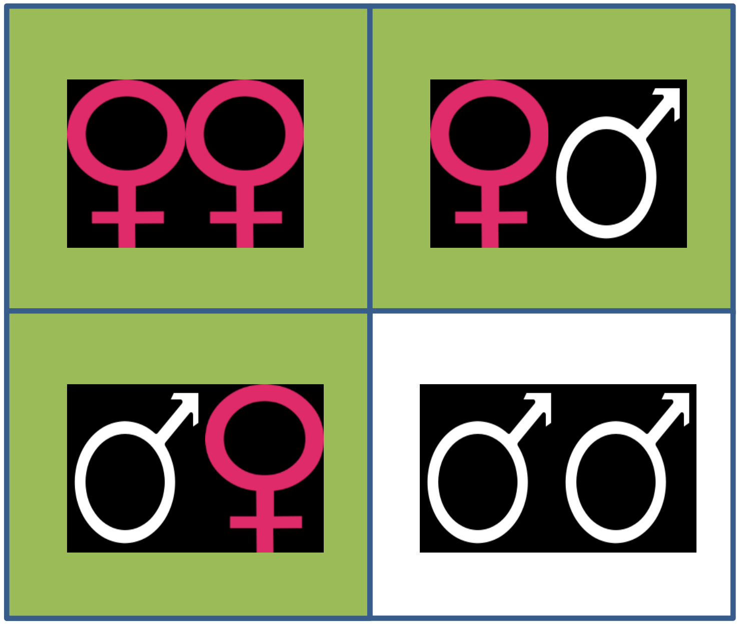
Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



4. Rodina má dvě děti. Jedno z nich je dívka.

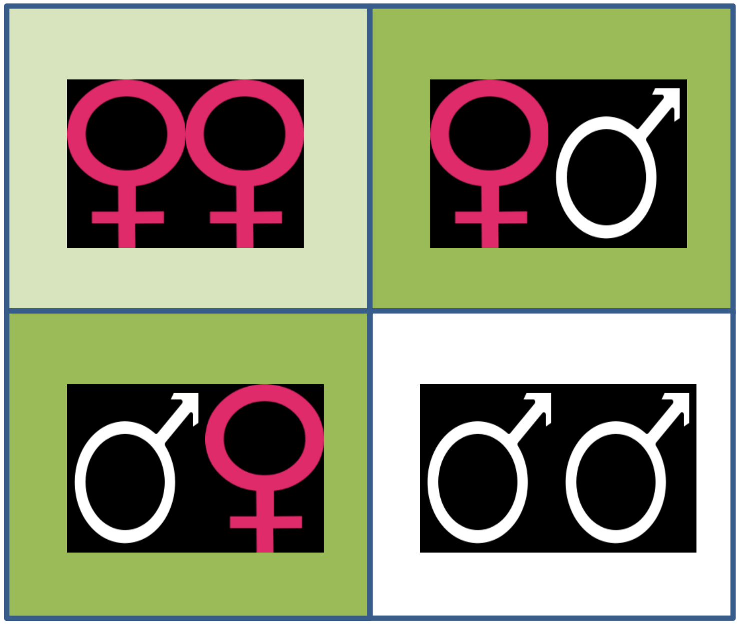
B) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



4. Rodina má dvě děti. Jedno z nich je dívka.
   B) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je stejná jako pravděpodobnost narození chlapce.



$$P(DD) = \frac{1}{3}$$

4. Rodina má dvě děti. Jedno z nich se jmenuje Kleopatra.
C) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

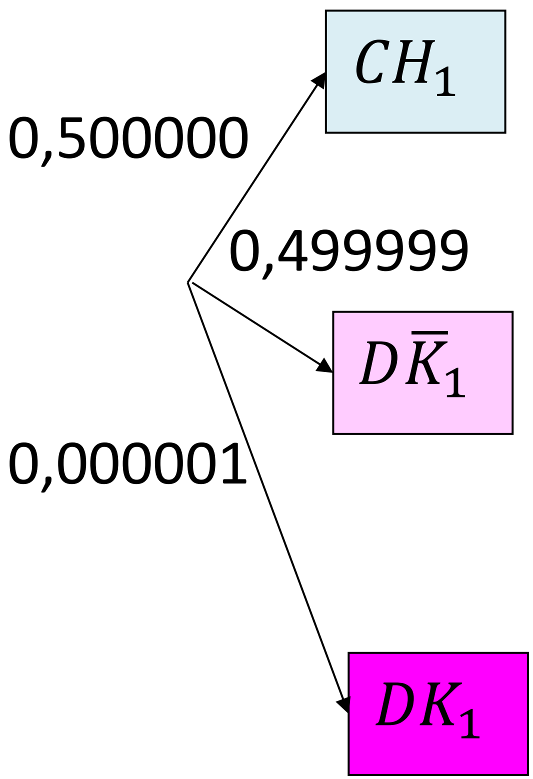
- § 62 odst. 1 zákona o matrikách: „Matriční úřad nezapíše jméno, pokud je mu známo, že toto jméno užívá žijící sourozenec, mají-li sourozenci společné rodiče.“
- Dle MVČR (kdejsme.cz) a ČSÚ: $P(K|D_i) = \frac{10}{5\,347\,235} \approx 0{,}000002$

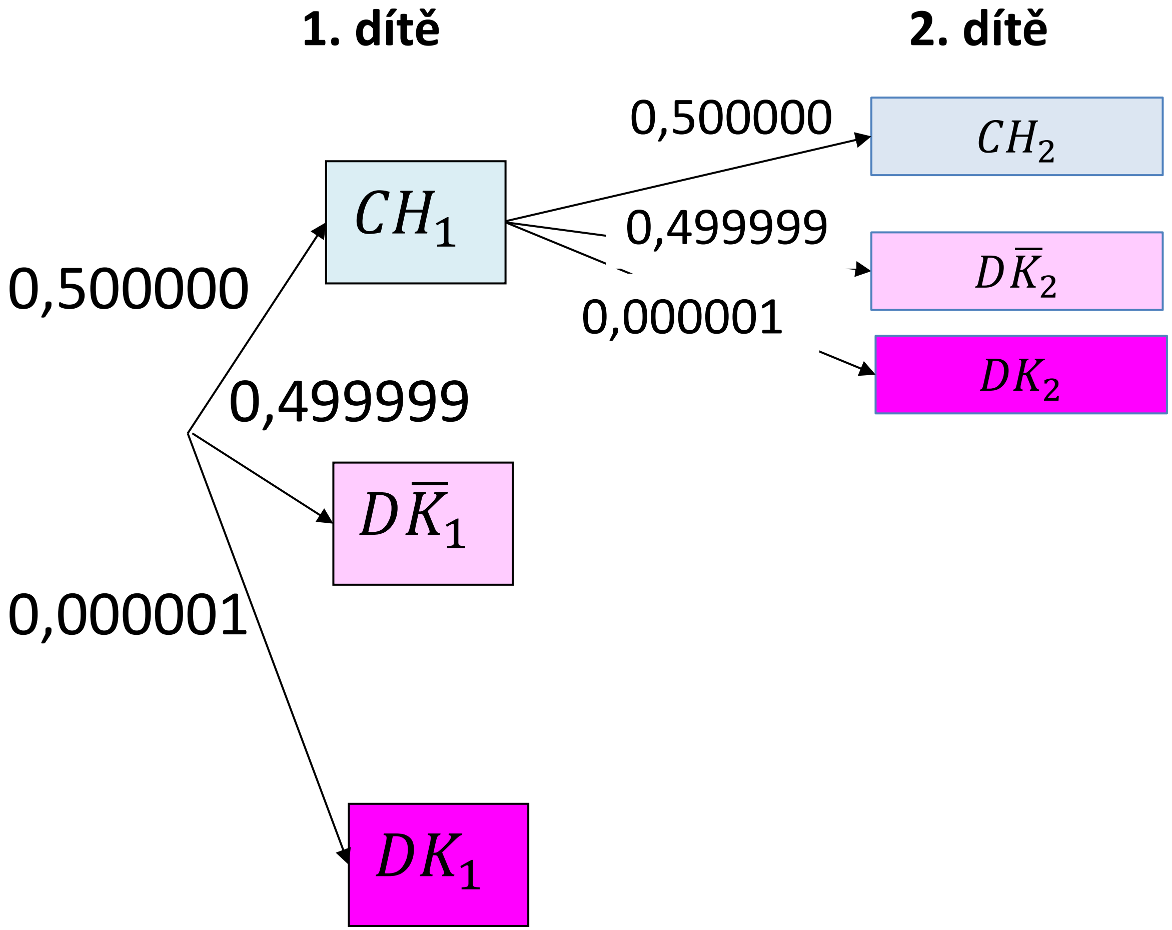
Označme:

K …	dítě je pojmenováno Kleopatra
D_i …	*i* - té dítě je dívka
CH_i …	*i* – té dítě je chlapec
DK_i …	*i* – té dítě je dívka a jmenuje se Kleopatra $(D_i \cap K)$
$D\overline{K}_i$ …	*i* – té dítě je dívka a nejmenuje se Kleopatra $(D_i \cap \overline{K})$

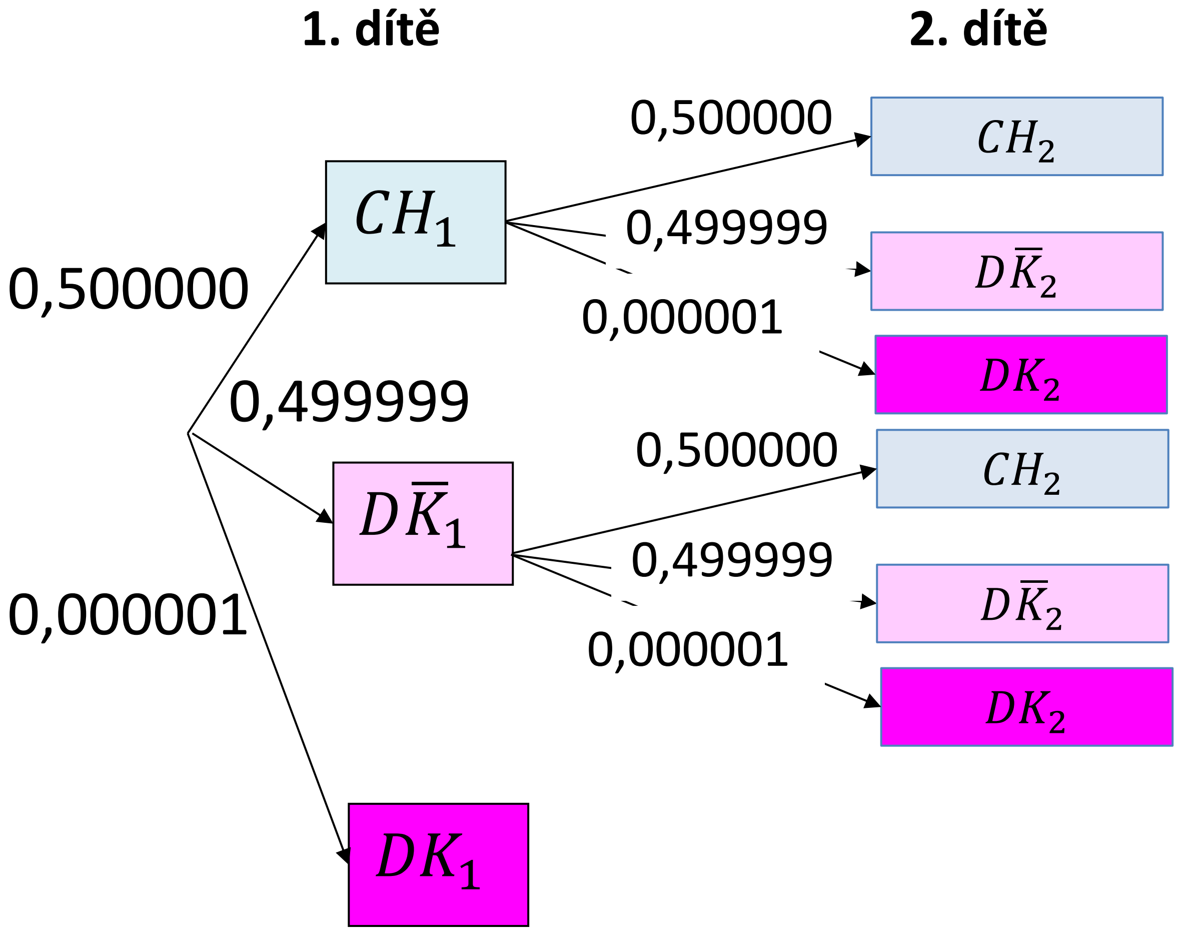
- $P(DK_i) = P(K|D_i)P(D_i) = 0{,}000002 \cdot 0{,}5 = 0{,}000001$
- $P(D\overline{K}_i) = P(\overline{K}|D_i)P(D_i) = 0{,}999998 \cdot 0{,}5 = 0{,}499999$

1. dítě



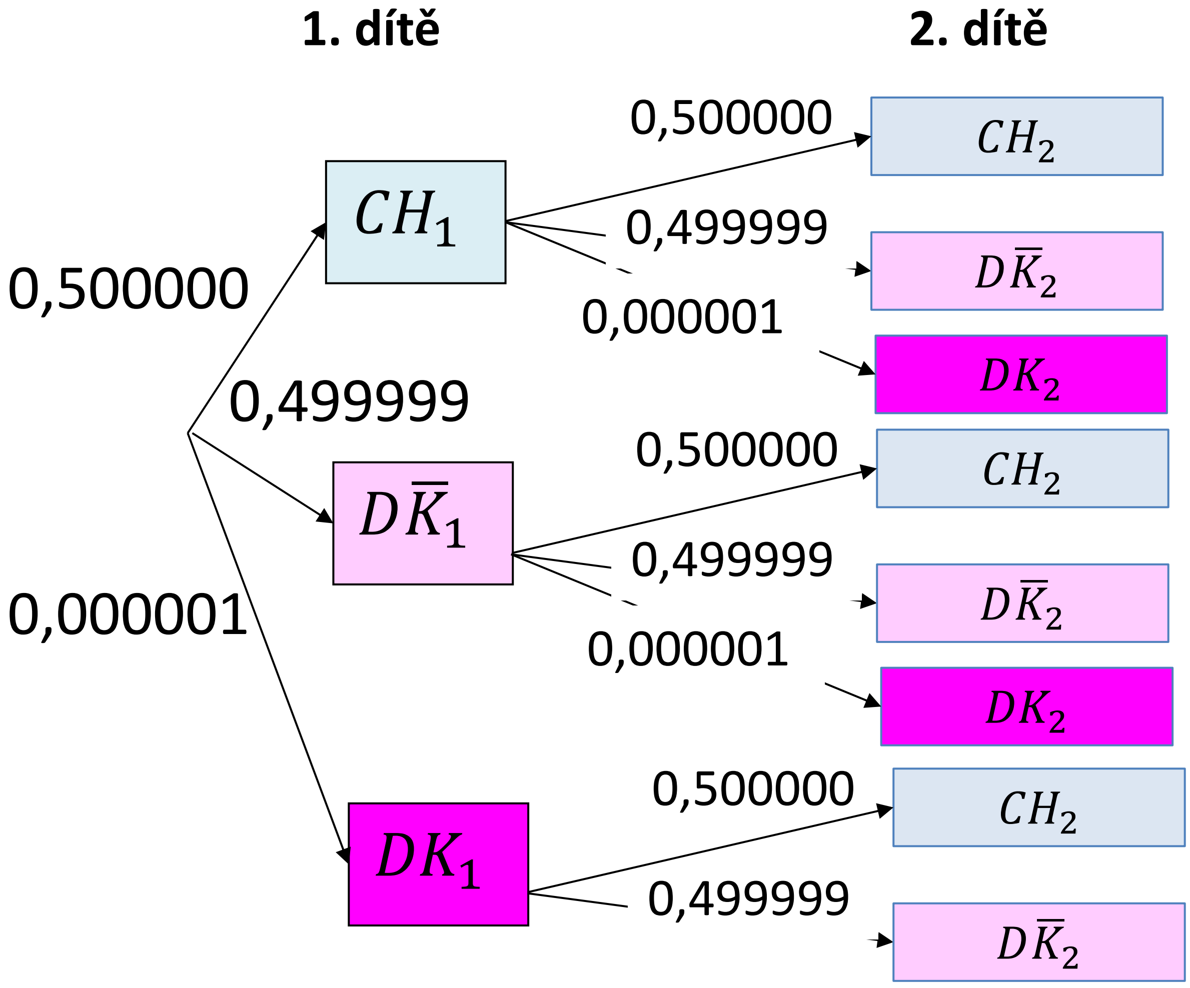


1. dítě
2. dítě
0,500000
0,499999
0,000001
CH_1
$D\overline{K}_1$
DK_1
0,500000
0,499999
0,000001
CH_2
$D\overline{K}_2$
DK_2

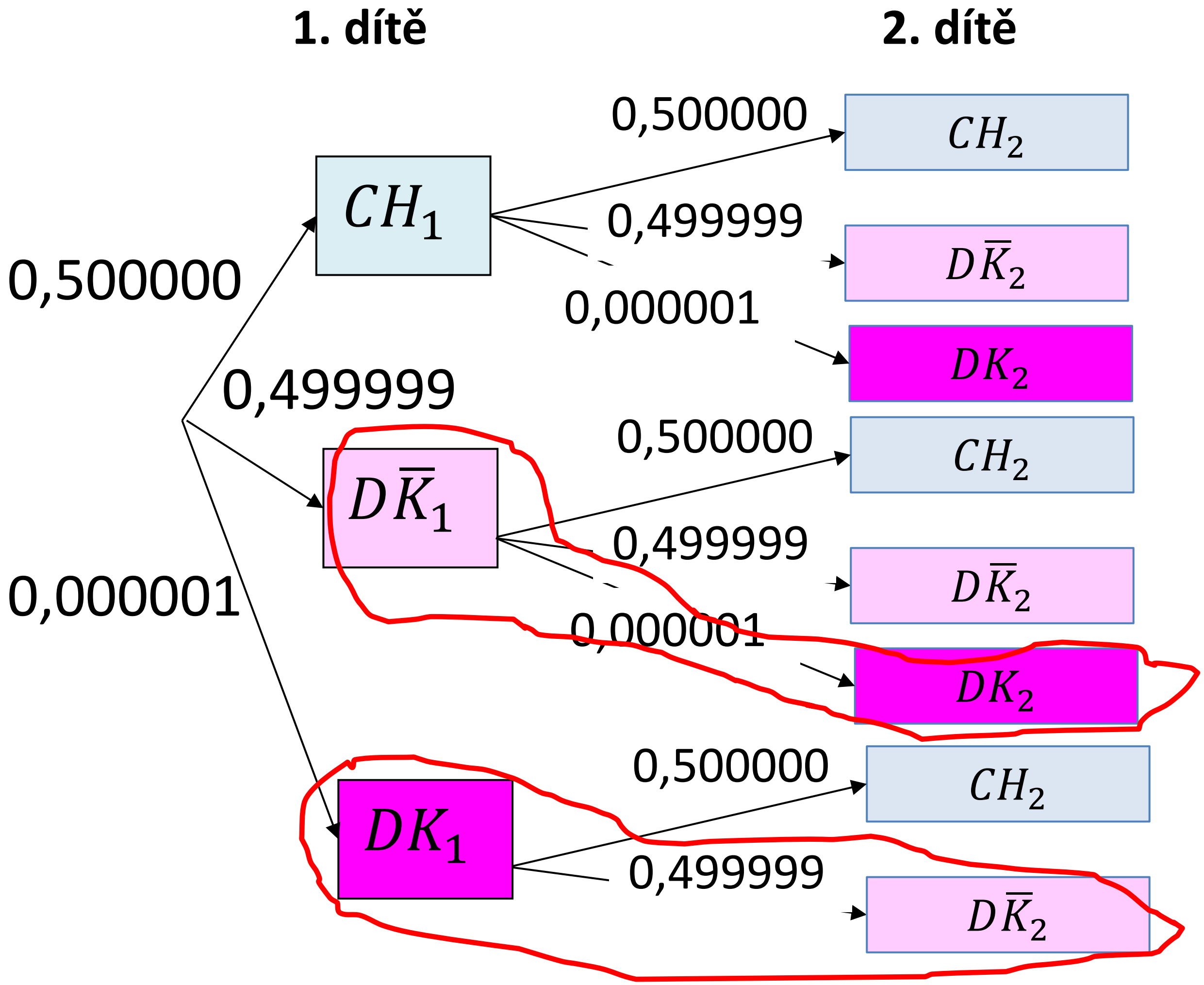


1. dítě
2. dítě
0,500000
0,499999
0,000001
CH_1
$D\overline{K}_1$
DK_1
0,500000
0,499999
0,000001
CH_2
$D\overline{K}_2$
DK_2
0,500000
0,499999
0,000001
CH_2
$D\overline{K}_2$
DK_2

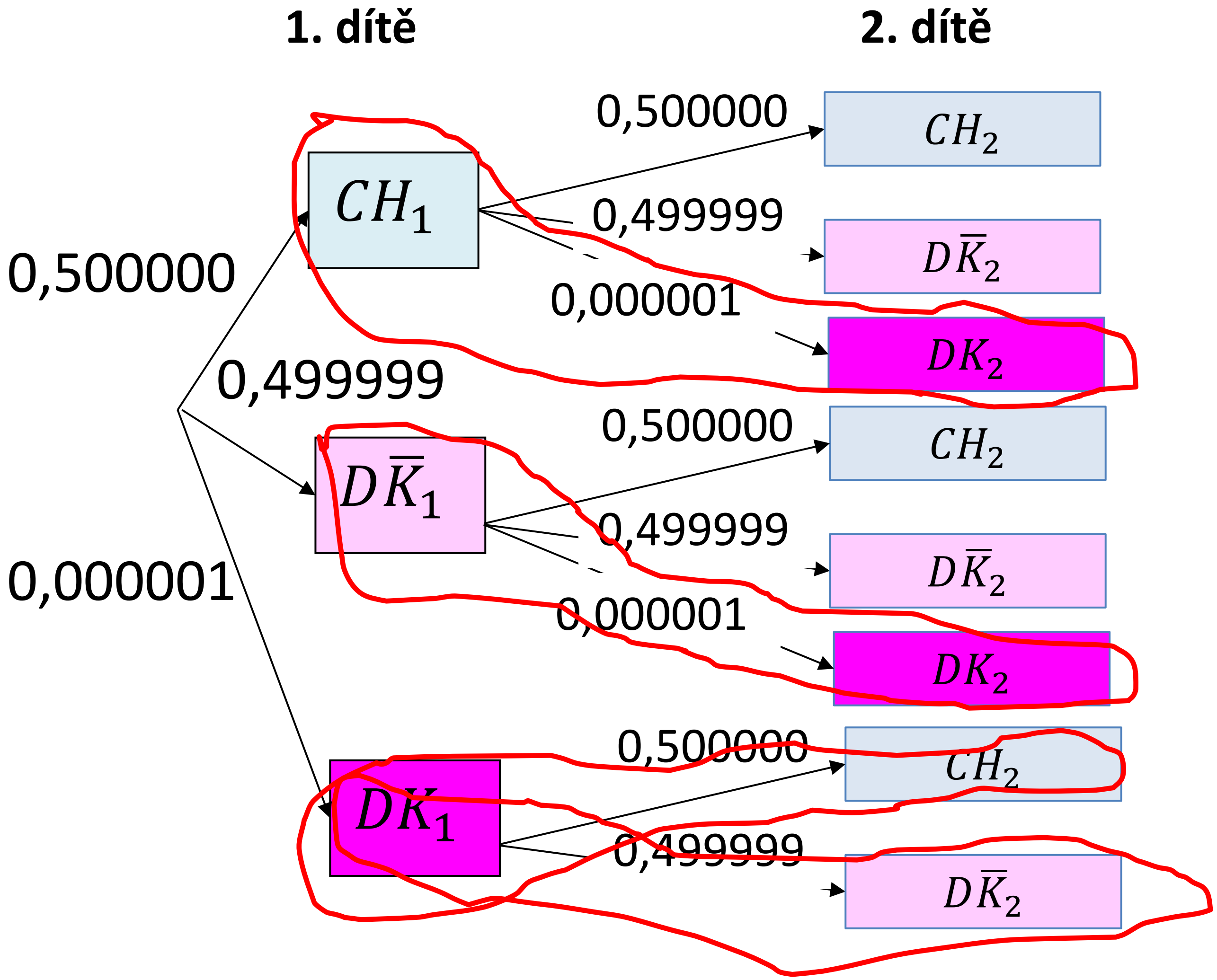
$$P(dvě\ dcery | jedno\ dítě\ je\ Kleopatra) = \frac{P(dvě\ dcery, z\ nichž\ jedna\ z\ nich\ je\ Kleopatra)}{P(jedno\ z\ dětí\ je\ Kleopatra)}$$



$$P(dvě\ dcery | jedno\ dítě\ je\ Kleopatra) = \frac{\boxed{P(dvě\ dcery, z\ nichž\ jedna\ z\ nich\ je\ Kleopatra)}}{P(jedno\ z\ dětí\ je\ Kleopatra)}$$

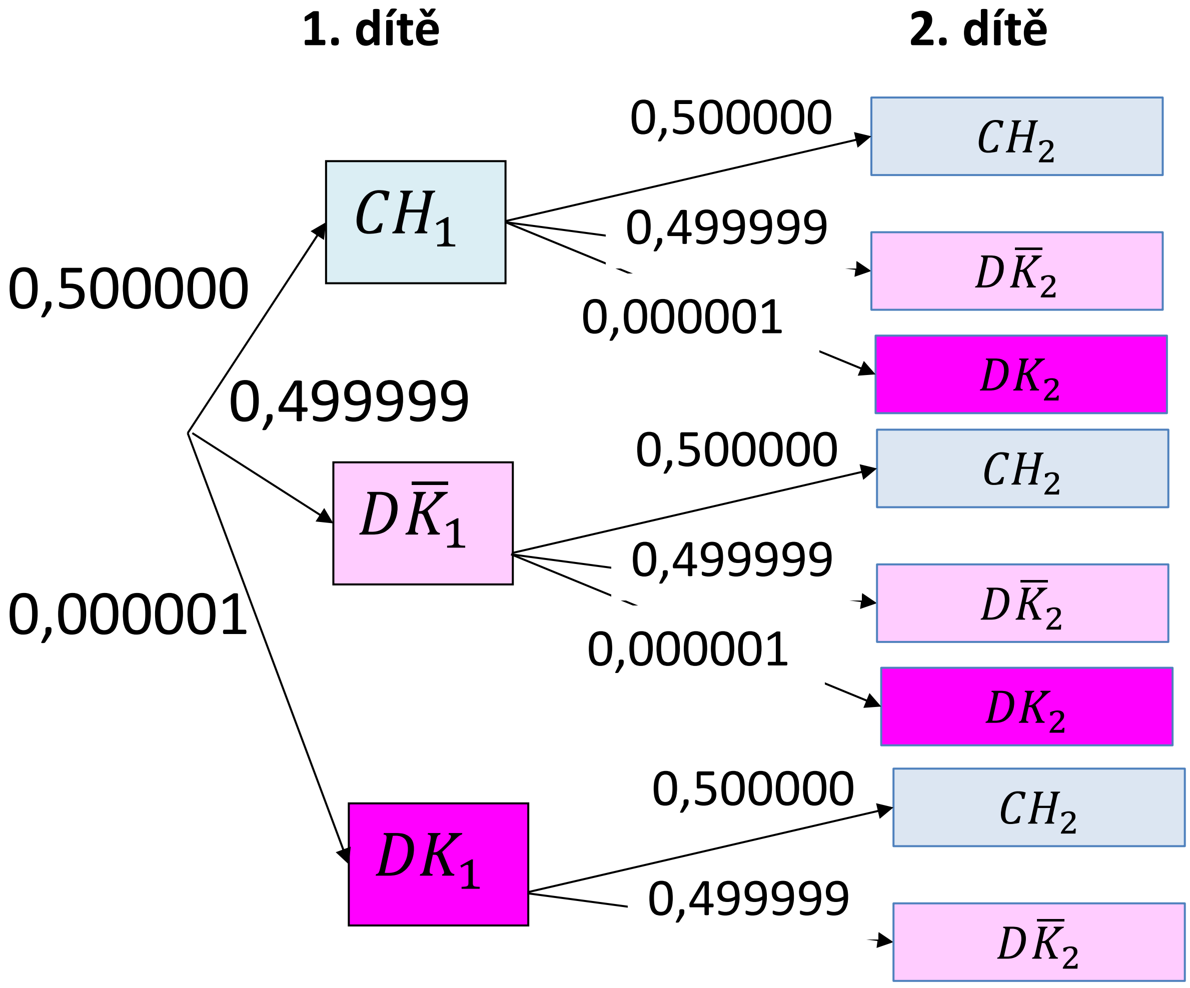


$$P(dvě\ dcery | jedno\ dítě\ je\ Kleopatra) = \frac{P(dvě\ dcery, z\ nichž\ jedna\ z\ nich\ je\ Kleopatra)}{\boxed{P(jedno\ z\ dětí\ je\ Kleopatra)}}$$



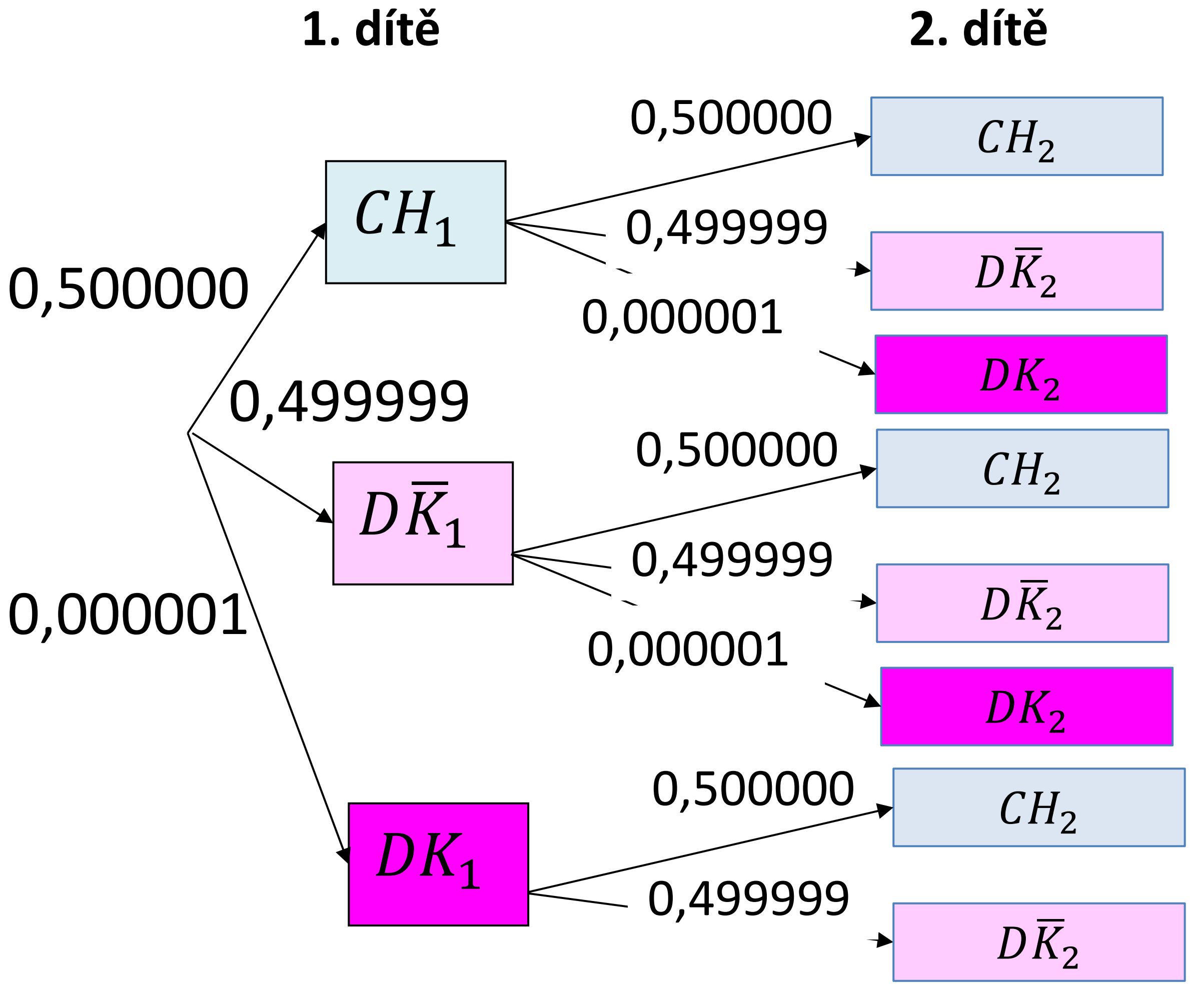
$$P(dvě\ dcery | jedno\ dítě\ je\ Kleopatra)$$

$$= \frac{P((D\overline{K}_1 \cap DK_2) \cup (DK_1 \cap D\overline{K}_2))}{P((CH_1 \cap DK_2) \cup (D\overline{K}_1 \cap DK_2) \cup (CH_1 \cap D\overline{K}_2) \cup (DK_1 \cap D\overline{K}_2))}$$



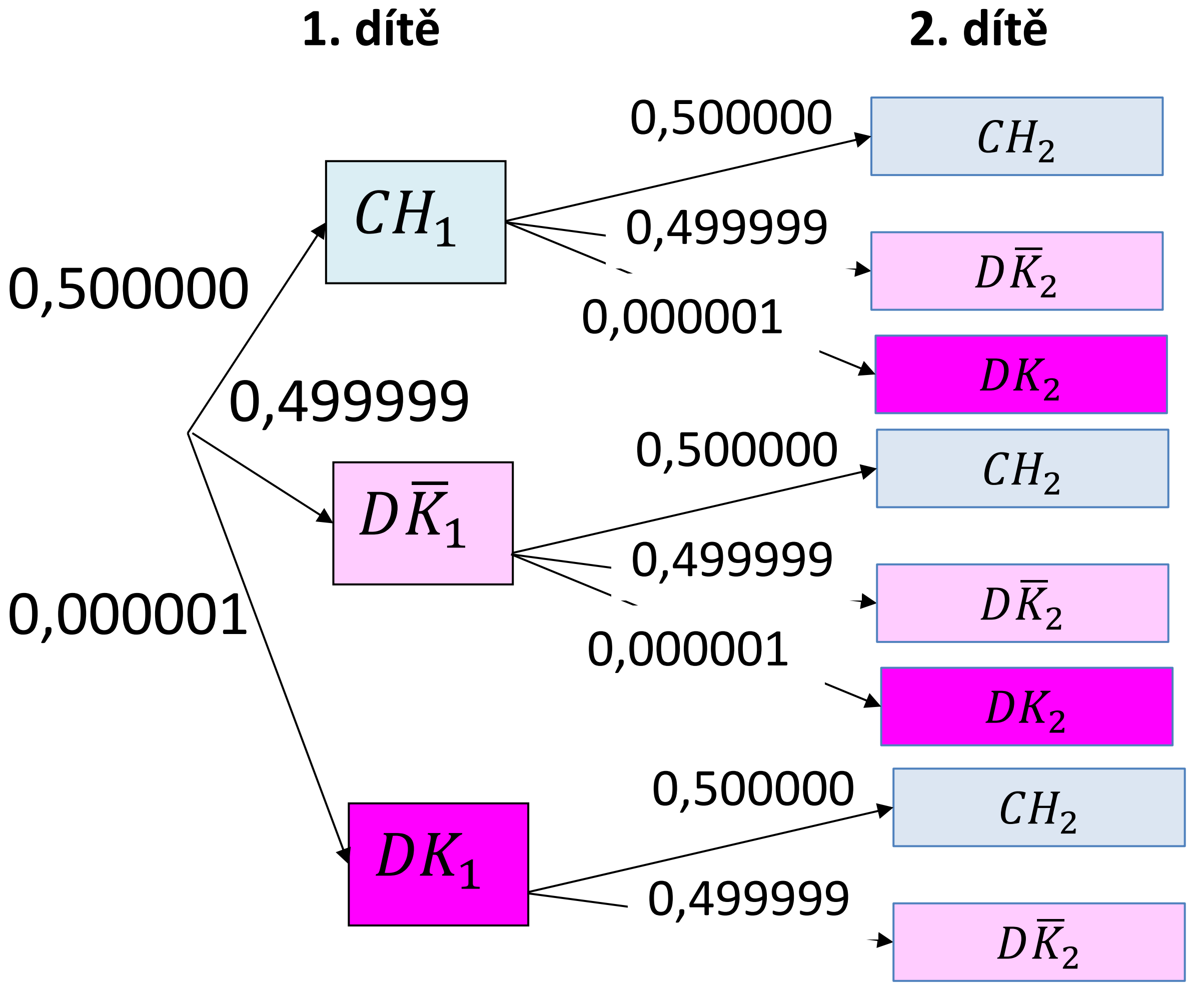
$$P(dvě\ dcery | jedno\ dítě\ je\ Kleopatra)$$

$$= \frac{0{,}499999 \cdot 0{,}000001 + 0{,}000001 \cdot 0{,}499999}{P((CH_1 \cap DK_2) \cup (D\overline{K}_1 \cap DK_2) \cup (CH_1 \cap D\overline{K}_2) \cup (DK_1 \cap D\overline{K}_2))}$$

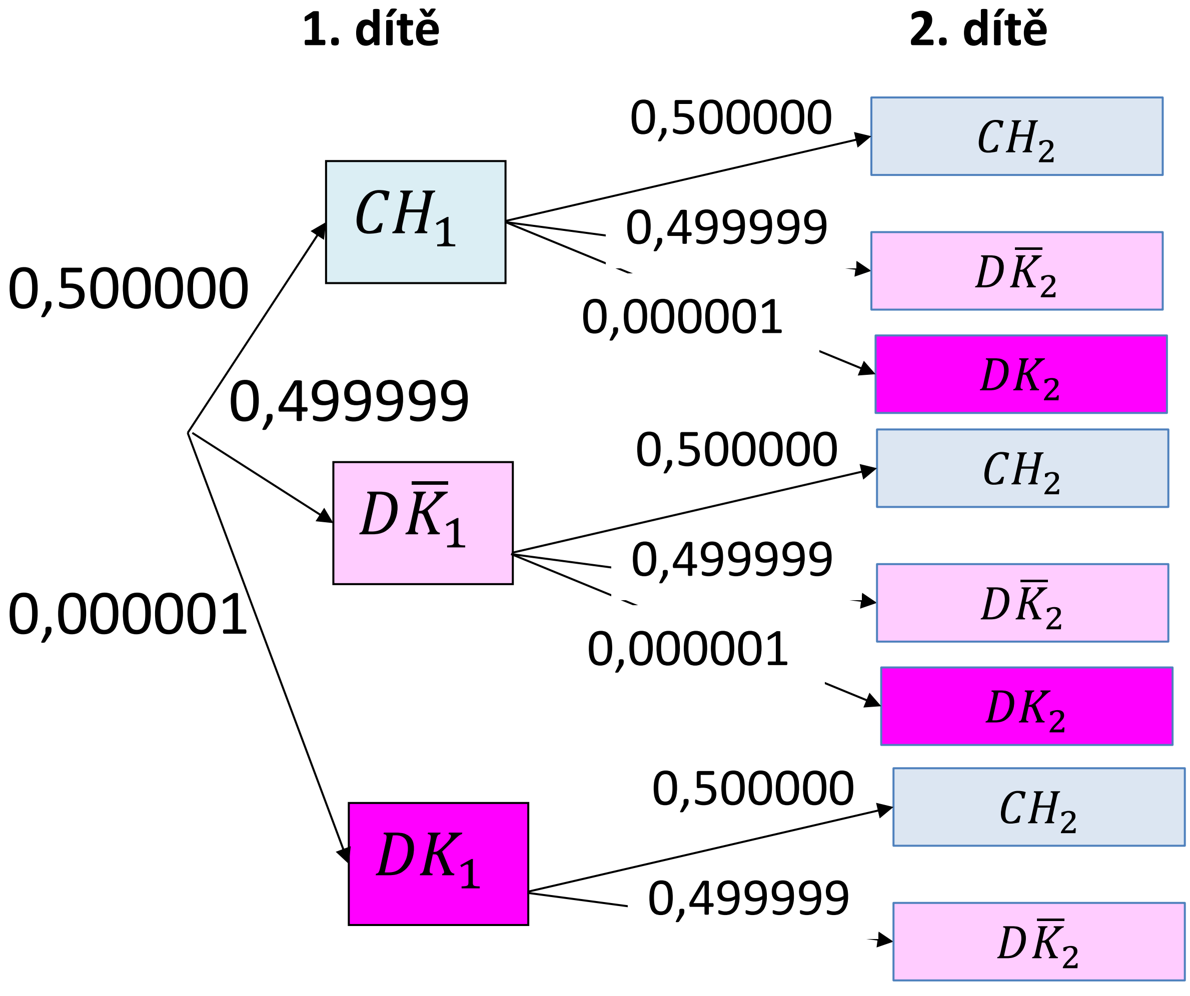


$$P(dvě\ dcery|jedno\ dítě\ je\ Kleopatra)$$

$$= \frac{0{,}499999 \cdot 0{,}000001 + 0{,}000001 \cdot 0{,}499999}{0{,}500000 \cdot 0{,}000001 + 0{,}499999 \cdot 0{,}000001 + 0{,}000001 \cdot 0{,}500000 + 0{,}000001 \cdot 0{,}499999}$$



$$P(dvě\ dcery|jedno\ dítě\ je\ Kleopatra) = \frac{0{,}999998}{1{,}999998} = \mathbf{0{,}499999}$$



Pro srovnání

$$P(dvě\ dcery | jedno\ dítě\ je\ Marie) \cong \mathbf{0,493}$$

Dle MVČR (kdejsme.cz) a ČSÚ: $P(M|D) = \frac{288\,950}{5\,347\,235} \cong 0{,}054037$

Rodina má dvě děti.

Pravděpodobnost, že rodina má 2 dcery je $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

Víme, že jedno z dětí je dcera.

Pravděpodobnost, že rodina má 2 dcery je $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

Víme, že jedno z dětí se jmenuje Kleopatra.

Pravděpodobnost, že rodina má 2 dcery je $0{,}499999 \cong \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

A co tenhle? Dokážete najít řešení?

Předpokládejme, že test na zjištění drog má senzitivitu 99% a specificitu 99%. To znamená, že **test správně identifikuje skutečného uživatele drog v 99% případů** a že **test vyloučí osobu, která drogy neužívá rovněž v 99% případů**.

Předpokládejme, že ve škole, která se rozhodla testovat své studenty na užívání drog je prevalence 0,5%. Tj. jen **0,5% ze všech studentů drogy skutečně bere**. Student Fajfka měl test pozitivní.

Jaká je pravděpodobnost, že student Fajfka skutečně užívá drogy?

Jak by se tato pravděpodobnost změnila, pokud by opakovaný (nezávislý) test vyšel také pozitivní?

Děkuji za pozornost!