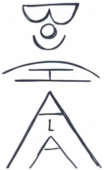
Nepřesně, ale přesně ...

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky

30. dubna 2014, přednáška v semináři

Aproximace spojité funkce polynomy na intervalu

- $f \in C\left(\langle 0, 1\rangle\right)$, $f \doteq p$, kde $p \in P$ ... množina všech polynomů;
- $f \doteq p$, tzn. že $\|f - p\|$ je malé.

Klíčová otázka:

Co rozumíme symbolem $\|f - p\|$?

- Ukažme si (pro ilustraci) dvě různé normy na $C\left(\langle 0,1\rangle\right)$:
  - $\|f-g\|_1 := \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)-g(x)|$,
  - $\|f-g\|_2 := \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$,

  a definujme (pro $n\in\mathbb{N},\ n>1$) na intervalu $\langle 0,1\rangle$ funkce

$$f(x) := 0,\ \ g_n(x) := \begin{cases} n^3x \ \text{ pro } 0\le x<\frac{1}{n^2}, \\ 2n-n^3x \ \text{ pro } \frac{1}{n^2}\le x<\frac{2}{n^2}, \\ x=0 \ \text{ pro } \frac{2}{n^2}\le x\le 1. \end{cases}$$

  Pak
  - $\|f-g_n\|_1 := n \to +\infty$ pro $n\to+\infty$,
  - $\|f-g_n\|_2 := \frac{1}{n} \to 0$ pro $n\to+\infty$.

Věta (Weierstrassova, 1885).

Nechť $f \in C(\langle 0,1\rangle)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom p takový, že

$$\|f - p\|_1 := \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

V praxi často pracujeme se spojitými (případně hladkými) funkcemi, které jsou dány pouze hodnotami v určitých bodech (získanými například měřením). Předpokládejme, že známe hodnoty funkce f v navzájem různých bodech $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

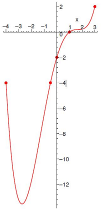
Zadejme si úkol: aproximovat hodnoty funkce f v ostatních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.

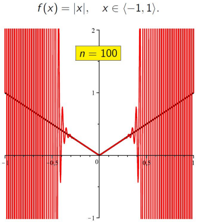
- Dá se ukázat, že existuje právě jeden (tzv. **Lagrangeův**) polynom nejvýše n-tého stupně takový, že $p(x_k) = f(x_k)$ pro každé $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, a to

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} f(x_i).$$

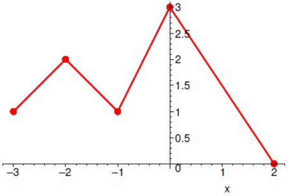
Příklad pro $n = 2$:

$$p(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2).$$

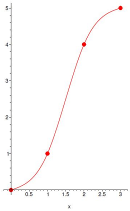




- **Lineární interpolace** ... funkci f aproximujeme na každém z intervalů $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ lineární funkcí danou body $\big(x_k, f(x_k)\big)$, $\big(x_{k+1}, f(x_{k+1})\big)$, tj. Lagrangeovým polynomem prvního řádu.



- **Interpolace kubickými spline – funkcemi** ... dá se ukázat, že existuje právě jedna funkce p taková, že
  - v každém intervalu $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ splývá p s nějakým polynomem nejvýše třetího stupně;
  - p, p', p'' jsou spojité na $\langle a, b\rangle$;
  - $p(x_k) = f(x_k)$ pro každé $k \in \{0, 1, \dots, n\}$;
  - $p''(a) = p''(b) = 0$.



Aproximace spojité funkce polynomy na okolí bodu

- Buď $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(x_0):=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$. Pak přímka

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

je tečnou grafu funkce f sestrojenou v bodě $\big(x_0,f(x_0)\big)$, tzn. že funkce

$$T(x):=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

je nejlepší lineární aproximací funkce f v „blízkosti“ bodu x_0.

Co to znamená?

- To znamená, že ze všech funkcí $p(x):=ax+b$, kde $a,b\in\mathbb{R}$, bude chyba

$$R(x):=f(x)-p(x)$$

(nejmenší) pro x „blízké“ x_0 právě tehdy, bude-li

$$p(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Co to znamená?

- První nápad - požadavek:

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \left[f(x) - p(x)\right] = \lim_{x\to x_0} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0.$$

To však bude pravda pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a $b := f(x_0) - ax_0$.

- Druhý (a konečně dobrý nápad) - požadavek:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x - x_0} = 0.$$

Tato podmínka je totiž ekvivalentní s volbou

$$a := f'(x_0), \ \ b := f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

tzn.

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Věta (Taylorova).

Nechť $f \in C^{n+1}(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pak pro funkci

$$R_{n+1}(x) := f(x) - T_n(x),$$

kde

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Navíc: pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ existuje ξ ležící mezi body x a x_0 takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Příklad.

Buď $f(x) := \sin x,\ x_0 = 0$.
Pak

$$T_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Navíc lze dokázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = \sin x$,
tzn.

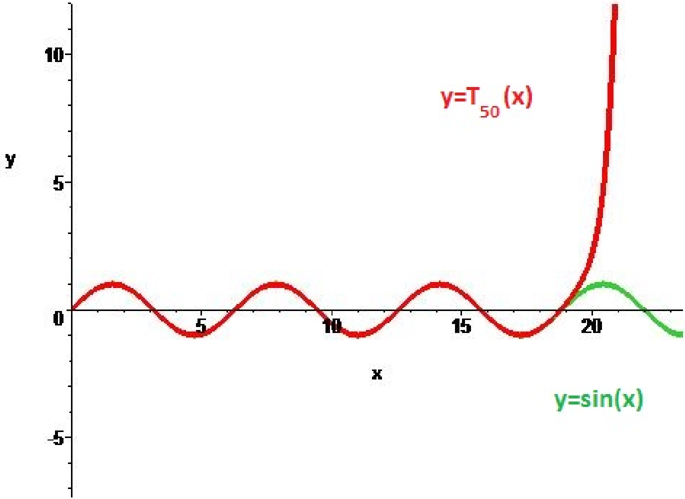
$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\sin(22) = \lim_{n\to\infty} T_n(22) \doteq T_{50}(22).$$

$T_{50}(x) :=$

$$x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9-\frac{1}{39916800}x^{11}+\frac{1}{6227020800}x^{13}-\frac{1}{1307674368000}x^{15}+\frac{1}{355687428096000}x^{17}-\frac{1}{121645100408832000}x^{19}+\frac{1}{51090942171709440000}x^{21}-\frac{1}{25852016738884976640000}x^{23}+\frac{1}{15511210043330985984000000}x^{25}-\frac{1}{10888869450418352160768000000}x^{27}+\frac{1}{8841761993739701954543616000000}x^{29}-\frac{1}{8222838654177922817725562880000000}x^{31}+\frac{1}{8683317618811886495518194401280000000}x^{33}-\frac{1}{10333147966386144929666651337523200000000}x^{35}+\frac{1}{13763753091226345046315979581580902400000000}x^{37}-\frac{1}{20397882081197443358640281739902897356800000000}x^{39}+\frac{1}{33452526613163807108170062053440751665152000000000}x^{41}-\frac{1}{60415263063373835637355132068513997507264512000000000}x^{43}+\frac{1}{119622220865480194561963161495657715064383733760000000000}x^{45}-\frac{1}{258623241511168180642964355153611979969197632389120000000000}x^{47}+\frac{1}{608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000}x^{49}$$

$$\sin(22) \doteq T_{50}(22) \doteq 159{,}1841143$$


y=T50(x)
y=sin(x)
y
x
10
5
0
-5
5
10
15
20

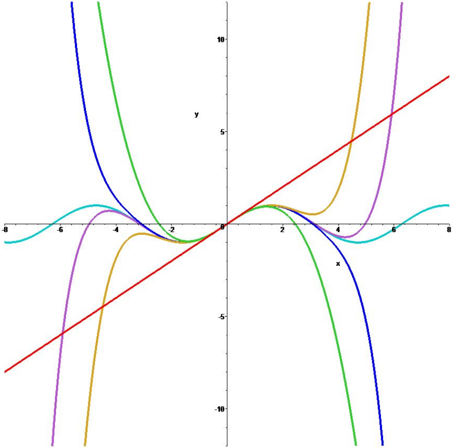
$$\sin(22) = \sin(22 - 8\pi) \doteq T_{10}(22 - 8 \cdot 3,14159)$$

$$T_{10}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

$$\sin(22) - T_{10}(22 - 8 \cdot 3,14159) \doteq 0,0067$$

$$\sin(22) = -\sin(22-7\pi) \doteq -T_1(22-7\cdot 3,14159) = -(22-7\cdot 3,14159) \doteq -0,00887$$

$$\sin(22) - (-0,00887) \doteq 0,0000187$$



Děkuji vám za pozornost!